

**Proposições e Aplicações
Computacionais
em
Polímeros**

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**Proposições e Aplicações Computacionais em
Polímeros**

Tese Submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como
parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em
Engenharia Mecânica

Hilbeth Parente de Deus

Florianópolis, Abril de 2008

Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Proposições e Aplicações Computacionais em Polímeros

Hilbeth Parente de Deus

Esta tese foi julgada adequada para a obtenção do título de
Doutor em Engenharia
Especialidade Engenharia Mecânica, sendo aprovada em sua forma final

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Orientador

Rodrigo Rossi, Dr.

Coorientador

Fernando Cabral , Ph.D.

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Banca Examinadora

Marcelo Krajnc Alves, Ph.D.

Presidente da banca examinadora

Heraldo S. Costa Mattos, Dr. (Dep. Eng. Mec. - UFF)

Membro da banca examinadora

José Carlos Pereira, Dr.

Membro da banca examinadora

Claudio Roberto Ávila da Silva Jr., Dr.(Dep. Eng. Mec. - UTFPR)

Membro da banca examinadora

Hazim Ali Al-Qureshi, Ph.D.

Membro da banca examinadora

"... ninguém tem nada de bom sem sofrer ..."
Baden Powell e Vinicius de Moraes

Dedicatória

Este trabalho é dedicado ao grande amor da minha vida e meu filho Bernardo.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, prof. Marcelo, por toda atenção e dedicação indispensáveis. Agradeço a todos os amigos que me acompanharam nesta jornada ... especialmente a Anderson Borba, Carlos Alexandre Abreu, João Arantes, Juliano Heidrich, Paulo Bonifácio e Rodrigo Rossi. Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro confiado a este trabalho.

Agradeço aos meus amados pais que me acompanham desde o início desta caminhada.

Agradeço principalmente a minha esposa Claudia pelo amor, compreensão e copanherismo e ao meu filho Bernardo por me tornar uma pessoa melhor.

Agradeço em especial aos meus adorados sogros Sra. Olga Adaime de Borba e Sr. Claudio Antônio de Borba (in memorian) pelo sólido apoio e pelo carinho com que sempre me trataram.

Conteúdo

Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	vii
Nomenclatura	vii
Nomenclatura	viii
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
1.1 Apresentação da Tese	1
1.2 Viscoelasticidade	2
1.2.1 Estrutura Polimérica	5
1.2.2 O Efeito da Temperatura	8
1.3 Espumas Poliméricas	9
1.3.1 Sólidos Celulares	9
1.3.2 A Densidade Relativa (ρ^*)	12
2 Teoria Viscoelástica Finita	14
2.1 Relações Constitutivas Hereditárias	14
2.2 Formulação Global do Modelo de Deformação Finita	18
2.2.1 Formulação Lagrangeana	18
2.3 Formulação Incremental	22
2.3.1 Linearização e o Método de Newton	22
2.3.2 A Determinação do Módulo Tangente Global \mathbb{A}	24
2.4 O Modelo Viscoelástico	25
2.4.1 Forma do Modelo Viscoelástico Linear	26
2.4.2 Modelo de Viscoelasticidade Finita Geral	30
2.4.3 Um Modelo Particular de Viscoelasticidade Finita	33
2.4.4 Um Outro Modelo Viscoelástico Linear	43
2.4.5 Modelo Viscoelástico Finito	46

2.4.6	Um Modelo Particular para Viscoelasticidade Finita	48
2.5	Discretização Espacial do Problema	53
2.5.1	Discretização de Elementos Finitos via Galerkin	54
2.5.2	Montagem do Problema Global	57
2.6	Modelo Axisimétrico	57
2.7	Procedimento Numérico Global	59
2.8	Exemplos Numéricos	61
3	Um Modelo para Espumas Poliméricas	78
3.1	Introdução	78
3.2	A Formulação Adotada	81
3.3	Decomposição Multiplicativa	82
3.4	Pares Conjugados Tensão-Deformação	83
3.5	Lei Constitutiva, Potencial de Energia Livre e de Dissipação	84
3.6	Um Problema de Valor Inicial Elastoviscoplastico	87
3.7	Definição da Superfície de Escoamento	87
3.8	O Potencial de Fluxo	99
3.8.1	A Determinação de $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$	104
3.9	A Densidade Relativa (ρ^*)	106
3.10	Leis de Evolução para a Deformação Viscoplastica Acumulada (\bar{e}^{vp})	109
3.11	O Problema de Valor Inicial	112
3.11.1	A Aproximação via <i>Operator Split</i>	113
3.11.2	O Prognóstico Elástico	113
3.11.3	O Corretor Viscoplastico	116
3.11.4	Formulação do Mapeamento de Retorno Viscoplastico	121
3.12	O Sistema Local	122
3.13	Problema de Valor de Contorno Global	123
3.13.1	Conservação do Momento Linear	123
3.13.2	Formulação Forte: Configuração de Referência	125
3.13.3	Princípio do Trabalho Virtual	126
3.13.4	Formulação Fraca do Problema: Configuração de Referência	126
3.14	Formulação Incremental	127
3.14.1	Linearização e Método de Newton	128
3.15	Notas Sobre a Determinação de \mathbb{A}	129
3.16	Exemplos Numéricos	131
4	Conclusão	145
	Sugestões para trabalhos futuros	147
A	Fundamentação	158
A.1	O Operador de Boltzmann	158
A.2	Espaços de Funções	159

A.2.1	Espaços das Funções Contínuas	159
A.2.2	Espaços das Funções Integráveis	160
A.2.3	Espaços de Sobolev	161
A.3	Equações de Volterra	162
A.4	Noções de Mecânica do Contínuo	163
A.4.1	Movimento e Deformação de um Corpo \mathcal{B}	164
A.4.2	Leis de Conservação	171
A.4.3	O Modelo de Hencky	178
A.4.4	Pares Conjugados de Tensão-Deformação	179
A.5	Noções Sobre o Método de Elementos Finitos	179
B	Método de Newton	182
C	Funções Tensoriais Isotrópicas	186
C.1	Funções Tensoriais Isotópicas de Um Simples Argumento	186
C.2	A Função Exponencial Tensorial	188
C.2.1	Algumas Propriedades da Função Exponencial Tensorial	188
C.2.2	Integração via Mapeamento Exponencial	189

Lista de Figuras

1.1	Cadeia de polietileno	2
1.2	Cadeia de polibutadieno	2
1.3	Cadeia de nylon	3
1.4	Cadeia de policarbonato	3
1.5	Estrutura amorfa	5
1.6	Estrutura cristalina (<i>micelle</i>)	5
1.7	Polímero semicristalino ([21])	6
1.8	Representação esquemática da estrutura de uma <i>esferulite</i> ([21])	6
1.9	Mecanismo de deformação ([21])	7
1.10	Volume específico vs. temperatura	8
1.11	Materiais celulares bidimensionais: (a) colméia em alumínio; (b) colméia em papel com resina fenólica; (c) colméia cerâmica; (d) colméia cerâmica. [48].	10
1.12	Espuma cerâmica com células abertas (DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).	10
1.13	Espuma de alumínio com células fechadas (DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).	11
1.14	<i>The tetrakaidecahedral model / the Voronoi tessellation</i> para células fechadas ([89])	11
1.15	Modelos periódicos de células abertas. (a) parâmetros usados para definir um modelo simples. (b) Versão 3-D modelo simples. (c) Célula aberta considerada em [63]. (d) Unidade celular do <i>tetrakaidecahedral model</i>	12
1.16	Algumas propriedades dos materiais celulares ([73])	13
2.1	Teste uniaxial de tração (exemplo 1)	61
2.2	Evolução da tensão de Cauchy σ_{xx} (exemplo 1)	62
2.3	Deslocamento na direção x (exemplo 1)	62
2.4	Vetores deslocamento nodais (exemplo 1)	62
2.5	1/4 da Placa com condição de simetria (exemplo 2)	63
2.6	Malha utilizada (exemplo 2)	63
2.7	Campo de deslocamentos (exemplo 2)	64
2.8	Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 2)	64
2.9	Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 2)	64
2.10	1/4 da Placa com condição e simetria (exemplo 3)	65

2.11	Malha sobre a geometria inicial do domínio (exemplo 3)	66
2.12	Campo de deslocamento ao final da análise (exemplo 3)	66
2.13	Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 3)	66
2.14	Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 3)	67
2.15	Problema axisimétrico	67
2.16	Malha sobre a geometria inicial do domínio (exemplo 4)	68
2.17	Campo de deslocamentos (exemplo 4)	68
2.18	Componente σ_{xx} da tensão de Cauchy no instante final da análise (exemplo 4)	69
2.19	Tensão cisalhante (σ_{xy}) no final da análise (exemplo 4)	69
2.20	Componente σ_{yy} da tensão de Cauchy no instante final da análise (exemplo 4)	69
2.21	Teste uniaxial de tração (exemplo 5)	70
2.22	Evolução da tensão de Cauchy σ_{xx} (exemplo 5)	70
2.23	Deslocamento na direção x (exemplo 5)	71
2.24	Vetores deslocamento nodais (exemplo 5)	71
2.25	1/4 da Placa com condição de simetria (exemplo 6)	72
2.26	Malha utilizada (exemplo 6)	72
2.27	Campo de deslocamentos (exemplo 6)	73
2.28	Vetores deslocamento nodais (exemplo 6)	73
2.29	Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 6)	73
2.30	Componente σ_{xy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 6)	74
2.31	Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 6)	74
2.32	Esquematisação do problema.	75
2.33	Malha utilizada (exemplo 7)	75
2.34	Campo de deslocamentos (exemplo 7)	76
2.35	Vetores deslocamento nodais (exemplo 7)	76
2.36	Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 7)	77
2.37	Componente σ_{xy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 7)	77
2.38	Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 7)	77
3.1	Comportamento esquemático de fluência ([33])	79
3.2	Sensibilidade à taxa de deformação do material ([33])	81
3.3	Superfície de escoamento e potencial de fluxo	88
3.4	Endurecimento volumétrico	89
3.5	Comportamento tensão-deformação da espuma de poliuretano (densidade 6.9 kgm/m ³) sob compressão uniaxial ([125])	91
3.6	Comportamento tensão-deformação da espuma de polipropileno (densidade 4.9 kgm/m ³) sob compressão uniaxial ([125])	91
3.7	Comportamento tensão-deformação da espuma de polipropileno (densidade 1.6 kgm/m ³) sob compressão uniaxial ([125])	92
3.8	Comportamento tensão-deformação da espuma de poliuretano (densidade 6.9 kgm/m ³) sob compressão hidrostática ([125])	92

3.9	Comportamento tensão-deformação da espuma de polipropileno (densidade 4.9 kgm/m ³) sob compressão hidrostática ([125])	93
3.10	Comportamento tensão-deformação da espuma de poliuretano (densidade 6.9 kgm/m ³) sob tração uniaxial ([125])	94
3.11	Comportamento tensão-deformação da espuma de polistireno (densidade 1.6 kgm/m ³) sob cisalhamento simples ([125])	94
3.12	Curva de endurecimento obtida do gráfico $\bar{\tau}$ versus $\bar{\varepsilon}_a^{vp} = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right)$	95
3.13	P_{11} versus $\bar{\varepsilon}_a^p = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right)$	95
3.14	Compressão uniaxial	95
3.15	Ensaio de compressão uniaxial. [125]	104
3.16	Espaço de configurações.	114
3.17	Ensaio de compressão uniaxial	131
3.18	Ensaio de compressão (0,0016 1/s)	132
3.19	Ensaio de compressão (0,08 1/s)	133
3.20	Tronco de cone	134
3.21	Deslocamento Y (0,0016s ⁻¹ e 0,08s ⁻¹)	134
3.22	Densidade relativa (0,0016s ⁻¹ e 0,08s ⁻¹)	135
3.23	Deformação volumétrica plástica (0,0016s ⁻¹)	135
3.24	Deformação volumétrica plástica (0,08s ⁻¹)	135
3.25	Tensão equivalente de von Misses (0,0016s ⁻¹)	136
3.26	Tensão equivalente de von Misses (0,08s ⁻¹)	136
3.27	Tensão de Cauchy na direção x (0,0016s ⁻¹)	136
3.28	Tensão de Cauchy na direção x (0,08s ⁻¹)	137
3.29	Tensão de Cauchy na direção y (0,0016s ⁻¹)	137
3.30	Tensão de Cauchy na direção y (0,08s ⁻¹)	137
3.31	Tensão cisalhante (0,0016s ⁻¹)	138
3.32	Tensão cisalhante (0,08s ⁻¹)	138
3.33	Compressão lateral do polipropileno	139
3.34	Deslocamento em x (exemplo 3)	140
3.35	Deslocamento em y (exemplo 3)	140
3.36	Densidade relativa ρ^* vs. fator de carga	140
3.37	Anel de polipropileno	141
3.38	Deslocamento em x (exemplo 4)	142
3.39	Deslocamento em y (exemplo 4)	142
3.40	Tensão de Cauchy na direção x (exemplo 4)	142
3.41	Tensão de cisalhamento (exemplo 4)	143
3.42	Tensão de Cauchy na direção y (exemplo 4)	143
3.43	Deformação volumétrica plástica (exemplo 4)	143
3.44	Densidade relativa (exemplo 4)	144

Lista de Tabelas

2.1	Método de Newton para o problema global	60
2.2	Cômputos requeridos em cada ponto	60
3.1	Verificação do critério de escoamento	117
3.2	Algoritmo de Newton aplicado ao sistema de equações do algoritmo de mapeamento de retorno	124

Nomenclatura

\mathbf{b}	força de corpo
$\bar{\mathbf{b}}$	força de corpo prescrita
c	constante material
\vec{f}^{int}	vetor de forças internas
\vec{f}^{ext}	vetor de forças externas
u^h	função de aproximação
u_I	dados discretos
m	massa do corpo
\mathbf{n}	normal externa a Γ^t
\mathbf{n}_o	normal externa a Γ_o^t
p	parcela hidrostática de tensão
p_c, p_t	compressão e tração hidrostática
q	tensão de von Mises efetiva
t	tempo
\mathbf{t}	força de superfície
$\bar{\mathbf{t}}$	tração prescrita
$\bar{\mathbf{u}}$	deslocamento prescrito
\mathbf{u}	campo de deslocamentos
\mathbf{u}^g	vetor de deslocamentos global
$\delta\mathbf{u}$	campo de deslocamentos virtuais
$\delta\mathbf{u}^g$	vetor de deslocamentos virtuais global
\mathbb{A}	tensor de quarta ordem associado ao módulo tangente global
\mathbf{A}	forma matricial de \mathbb{A}
dA	elemento infinitesimal de área na configuração atual
dA_o	elemento infinitesimal de área na configuração de referência
A, B	comprimentos da elipse de escoamento
\mathbf{B}	tensor de Cauchy-Green à esquerda
\mathbb{B}	tensor de quarta ordem relacionado variação da parte material
\mathfrak{B}	copo contínuo
\mathbf{C}	tensor de Cauchy-Green à direita
\mathbf{D}	tensor taxa de deformação

- $\bar{\mathbf{D}}$ taxa de deformação modificada-rotacionada
- \mathbb{D} tensor relação constitutiva elástica de quarta ordem
- $\tilde{\mathbb{D}}$ tensor de quarta ordem associado relacionado com a parte material de \mathbb{A}
- \mathcal{D} dissipação associada ao problema puramente mecânico
- \mathbb{D}^{vp} tensor de quarta ordem módulo tangente consistente elastoviscoplastico
- E módulo de elasticidade longitudinal
- E_M módulo de elasticidade do material completamente denso
- \mathbf{E} tensor deformação de Hencky
- \mathcal{E} espaço das tensões admissíveis
- \mathbf{F} tensor gradiente de deformação
- $\dot{\mathbf{F}}$ taxa de variação do gradiente de deformações
- \mathcal{F} função de escoamento
- F trabalho virtual do problema de grandes deformações
- $G = G(t)$ módulo de cisalhamento
- \mathbf{G}^g matriz global dos gradientes das funções de forma para o caso axissimétrico
- \mathbf{G} matriz gradiente da função de forma para o caso axissimétrico
- $G = G(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{e}^{vp})$ potencial de fluxo plástico
- \mathbb{G}, \mathbb{H} tensores de quarta ordem relacionadas com a parte geométrica de \mathbb{A}
- \mathbb{I} tensor identidade de quarta ordem
- \mathbf{I} tensor identidade de segunda ordem
- J jacobiano de deformação
- J_2 segundo invariante do tensor deviatórico
- K módulo volumétrico
- \mathbf{K} matriz de rigidez
- \mathbb{K} matriz de rigidez do problema local
- $Kin_{u^h}(\Omega^h), Var_{u^h}(\Omega^h)$ espaços de aproximação
- $Kin_u(\Omega)$ espaço dos deslocamentos admissíveis
- \mathbf{L} gradiente espacial de velocidades
- \mathbf{N}^g matriz global das funções de forma oriundas de uma aproximação linear
- \mathcal{O} termos de ordem superior
- \mathbf{P} primeiro tensor tensão de Piola-Kirchoff
- \vec{R} vetor resíduo problema local
- \mathbf{R} tensor de rotação pura
- \mathbf{S} segundo tensor tensão de Piola-Kirchoff
- $Var_u(\Omega)$ espaço dos deslocamentos virtuais
- $\delta\mathcal{W}^{ext}$ trabalho virtual das forças externas
- $\delta\mathcal{W}^{int}$ trabalho virtual das forças internas
- α formas da elipse de \mathcal{F}
- β forma da elipse de G (cap. 4)
- δ_{ij} delta de kronecker
- ε tensor deformação infinitesimal

ε_v^p deformação plástica volumétrica
 ε_a^p deformação plástica axial
 α_k variáveis internas
 φ função movimento
 κ coeficiente de Lamé
 $\dot{\lambda}$ multiplicador plástico
 $\Delta\lambda$ incremento do multiplicador plástico
 Ψ potencial de energia livre
 μ coeficiente de Lamé
 ν coeficiente de Poisson
 ρ_M densidade de massa do material totalmente denso
 ρ_o densidade de massa na configuração de referência
 ρ densidade de massa na configuração corrente
 ρ^* densidade relativa
 σ tensor tensão de Cauchy
 $\bar{\tau}_y^o$ tensão de escoamento inicial
 τ tensor tensão de Kirchhoff
 $\bar{\tau}$ tensor tensão de Kirchhoff rotacionada
 \diamond pseudo-potencial de dissipação associada ao problema puramente mecânico

Γ_o^u contorno inicial com condições de deslocamentos prescritos
 Γ_o^t contorno inicial com condições de trações prescritas
 Γ^u contorno com condições de deslocamentos prescritos
 Γ^t contorno com condições de trações prescritas
 Ω domínio
 Ω_o configuração de referência
 Ω_t configuração corrente
 Ω^h domínio discretizado
 β_k forças termodinâmicas associadas as α_k

$(\bullet)^{teste}$ valor avaliado no estado teste
 $(\bullet)^D$ parte deviatórica de \bullet
 $(\bullet)^e$ parte elástica de \bullet
 $(\bullet)^{vp}$ parte viscoplástica de \bullet
 $(\bullet)_{n+1}, (\bullet)_n$ valor avaliado no instante $n + 1$ e n
 $:$ ou \cdot produto interno
 $\text{sym}(\bullet)$ parte simétrica de \bullet
 $\text{skew}(\bullet)$ parte antissimétrica de \bullet

Resumo

O presente trabalho propõe modelos materiais e algoritmos, no escopo da *mecânica teórica e computacional*, visando a simulação numérica do comportamento de algumas classes de materiais *poliméricos*. Mais especificamente, o objetivo é propor modelos para *sistemas viscoelásticos e espumas poliméricas* e implementá-los.

O contexto de problemas não lineares é apresentado sob a forma de deformações finitas, medida de deformação de *Hencky* em associação ao tensor \mathbf{U} (*right stretch tensor*), considerando as aplicações em *sistemas viscoelásticos poliméricos* e *espumas poliméricas*. Algumas poucos estudos já haviam sido feitos com relação a medida de *Hencky* em associação ao tensor \mathbf{V} (*left stretch tensor*), ver por exemplo [123] e [124].

O modelo constitutivo adotado para a simulação de materiais *viscoelásticos* é baseado em modelos hipo-viscoelásticos, i.e. cujas equações constitutivas são formuladas em taxas (ver [36]). Neste tópico são propostas e exploradas duas formas constitutivas (primal e dual) em termos do par conjugado medida de deformação de *Hencky* (\mathbf{E}) e tensor tensão rotacionada de *Kirchhoff* ($\bar{\boldsymbol{\tau}}$).

O modelo *viscoplástico* proposto para aplicações em espumas poliméricas é não associativo, basea-se no modelo de *von Mises* modificado (pela inclusão da pressão hidrostática) e incorpora uma lei de encruamento isotrópico não linear (ver [37]). Uma metodologia via regularização também é proposta para garantir a evolução da densidade relativa (ρ^*) dentro do conjunto $\mathcal{K}_\rho = \{\rho^* \mid 0 < \rho^* \leq 1\}$. Vários exemplos são apresentados no decorrer do trabalho visando atestar os modelos e os algoritmos implementados.

Abstract

This work proposes material models and algorithms, in the scope of theoretical and computational mechanics, aiming the numerical simulation of the behavior of some classes of polymeric materials. More specifically, the objective is to propose models for viscoelastic systems and polymeric foams and perform their numerical implementation.

The nonlinear framework is related to finite deformations using the *Hencky* strain deformation measure in association to *right stretch tensor* \mathbf{U} , for application to viscoelastic materials and polymeric foams. Few research has been done over *Hencky* strain deformation measure in association to *left stretch tensor* \mathbf{V} , for exemple see [123] and [124].

The constitutive model adopted for the simulation of viscoelastic materials is based on hypoviscoelasticity models, i.e. whose constitutive equations are formulated in terms of rates (see [36]). Two constitutive relationships (primal and dual) in association of work-conjugate pair *Hencky* strain deformation measure (\mathbf{E}) and rotated *Kirchhoff* stress tensor ($\bar{\boldsymbol{\tau}}$) are proposed and explored .

The proposed viscoplastic model applied for polymeric foams is non associative, based on a modified von Mises model (by inclusion of the hydrostatic pressure) and incorporates a non linear isotropic hardening law (see [37]). A regularization approach is proposed to guarantee that the relative density (ρ^*) evolution is inside the set $\mathcal{K}_\rho = \{\rho^* \mid 0 < \rho^* \leq 1\}$. Various examples are presented along this work aiming to atest the models and implemented algorithms.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação da Tese

Neste trabalho são propostos modelos constitutivos e abordagens computacionais para a análise de problemas de grandes deformações envolvendo algumas estruturas poliméricas (materiais viscoelásticos e espumas). O objetivo do trabalho consiste em propor alguns modelos capazes de simular problemas de deformações finitas destas estruturas poliméricas e implementá-los. Neste contexto é aplicado o método dos elementos finitos.

Dentro do tema grandes deformações existem diferentes propostas para a abordagem dos problemas, ao contrário do que ocorre na área de pequenas deformações. Uma etapa de reflexão foi necessária para a escolha da proposta a ser utilizada visando a sua implementação. Dentre os diversos caminhos a serem tomados foi selecionada uma descrição *Lagrangeana total* juntamente com o par conjugado tensão-deformação sendo dados pela tensão rotacionada de *Kirchoff* e pela medida logarítmica de deformação, que viabilizou a utilização do *mapeamento exponencial*, abordagem esta que se mostrou bastante adequada ao desenvolvimento deste trabalho. O modelo *viscoplástico* é constituído, no caso de espumas poliméricas, por um modelo não associativo baseado no modelo de *von Mises* em que se incorpora o efeito da pressão hidrostática na resposta do material, o qual tem mostrado bons resultados no que diz respeito a esta aplicação, aliado ao modelo constitutivo de *Benallal* e um endurecimento isotrópico não linear.

A fim de melhor orientar o leitor e contextualizar este trabalho de uma forma mais abrangente, os parágrafos seguintes apresentam de forma concisa cada um dos capítulos desta tese.

O **capítulo 2** aborda a teoria viscoelástica finita proposta nesta tese. Inicialmente são explanados alguns modelos de viscoelasticidade e é definido o modelo adotado neste trabalho. Duas formulações são feitas para a abordagem do problema de viscoelasticidade finita (*medida de deformação de Hencky*) e alguns exemplos são apresentados considerando a hipótese de estado plano de deformações e axisimetria.

O **capítulo 3** enfoca a teoria *viscoplástica*, associada a espumas poliméricas. A descrição adotada foi a *Lagrangeana total*. Em seguida, apresenta-se a decomposição multiplicativa do gradiente da deformação em uma parte viscoplástica e uma parte elástica. A explanação do par conjugado da *medida logarítmica de deformação* e da *tensão rotacionada de Kirchoff* é feita na sequência. A utilização desta abordagem permite o mapeamento exponencial o qual resulta em

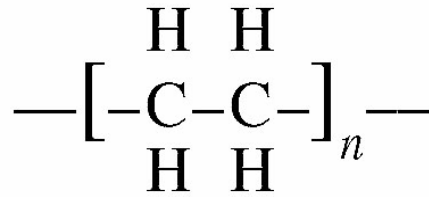


Figura 1.1: Cadeia de polietileno

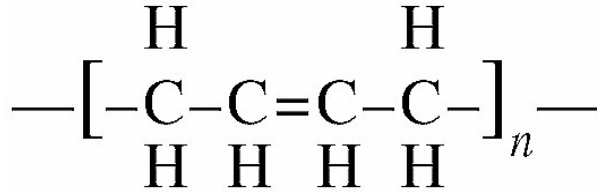


Figura 1.2: Cadeia de polibutadieno

algoritmos de *mapeamento de retorno* semelhantes ao que ocorre em pequenas deformações. A abordagem do material elastoviscoplastico é via um algoritmo baseado em operadores do tipo *Operator Split*. O modelo constitutivo do material elastoviscoplastico considera uma fase elástica e outra viscoplastica com uma relação constitutiva do tipo *Benallal* aliada a uma formulação *não associativa* baseada no modelo de *von Mises modificado*. Os resultados obtidos são confrontados com resultados encontrados na literatura e alguns exemplos são apresentados considerando a hipótese de estado plano de deformações e axisimetria.

O **capítulo 4** refere-se à conclusão do trabalho e os apêndices estão reservados para outros detalhes referentes a implementações numéricas. O **apêndice A** apresenta de forma sucinta os conceitos e resultados que serviram de base para todo o desenvolvimento deste trabalho, o **apêndice B**, mostra alguns detalhes do método de Newton que foi implementado para a solução de sistemas de equações não lineares e o **apêndice C** apresenta detalhes de algumas funções tensoriais isotrópicas utilizadas neste trabalho.

1.2 Viscoelasticidade

Os materiais viscoelásticos têm este nome por exibirem um comportamento tanto de sólido como de fluido. Dentre tantos exemplos existentes, pode-se citar os polímeros termoplásticos. Estes materiais são facilmente moldados, são resistentes à corrosão, são leves e podem ser utilizados na fabricação de plásticos extremamente resistentes constituídos de polímeros. Os polímeros são compostos por longas cadeias moleculares. Estas longas cadeias são constituídas por vários monômeros de hidrocarbonetos unidos em uma sequência periódica e específica de átomos de hidrogênio e carbono. Alguns exemplos destas cadeias encontram-se nas figuras seguintes (1.1, 1.2, 1.3 e 1.4). Qualitativamente pode-se distinguir dois tipos de polímeros: os com ligações não cruzadas e os com ligações cruzadas. Nos sistemas poliméricos com ligações não cruzadas

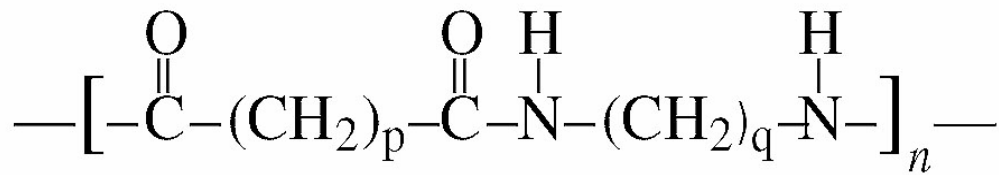


Figura 1.3: Cadeia de nylon

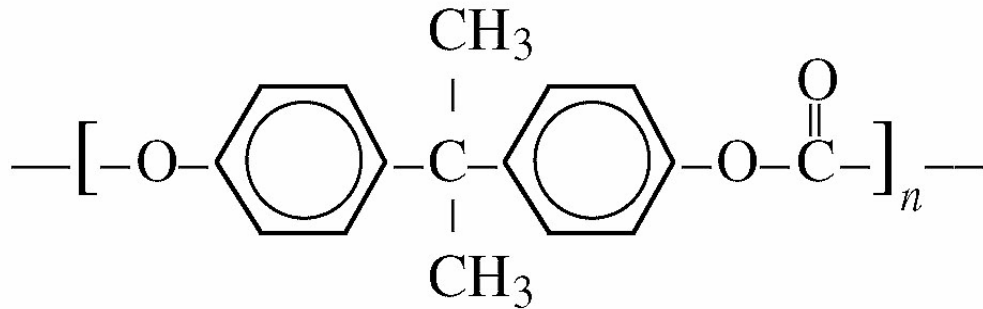


Figura 1.4: Cadeia de policarbonato

as longas cadeias são unidas por entrelaces apenas e não há pontes químicas entre as moléculas. Já nos com ligações cruzadas, as moléculas não são unidas apenas por entrelaces mas também por pontes químicas.

Considerando uma barra fina de um polímero com ligações não cruzadas sujeito a uma força trativa. A barra responderá inicialmente com um estiramento das moléculas através do seu volume, correspondendo a uma deformação elástica instantânea, e só então se iniciará o desemaranhamento, i.e., um escoamento interno. Neste caso quando o carregamento é removido as moléculas permitirão alguma contração tendendo a retornar ao seu comprimento de equilíbrio. Porém, o revés do escoamento das moléculas não ocorrerá na ausência de uma força. Imagine agora uma barra fina de um polímero com ligações cruzadas sujeito ao mesmo carregamento. Ocorrerá uma reposta elástica e a barra se comportará exatamente da mesma maneira anterior, inclusive com o estiramento das cadeias (escoamento interno). Porém, quando a força é retirada as ligações cruzadas produzem um escoamento interno reverso fazendo com que a barra retorne ao seu tamanho original. Estes casos são extremos e na prática o que existem são estruturas poliméricas intermediárias. Pode-se classificar intuitivamente os polímeros que possuem somente ligações não cruzadas como *fluidos viscoelásticos* desde que a deformação continue indefinidamente enquanto a força é aplicada. De outra forma, um polímero que possui somente ligações cruzadas poderia ser visto como um *sólido viscoelástico* desde que estas ligações produzam forças de equilíbrio quando as deformações excederem um certo valor.

Há polímeros oriundos da natureza (plantas e animais) que são utilizados há vários séculos em diversos tipos de aplicações. Estes incluem a borracha, a lã e a seda. Outros tipos de polímeros naturais de grande importância na fisiologia de animais e de plantas são as proteínas, as enzimas e a celulose.

Um grande número de ferramentas de pesquisa científica tem tornado possível a determinação da estrutura molecular deste grupo de materiais, assim como o desenvolvimento de muitos polímeros sintetizados a partir de pequenas moléculas orgânicas. Vários tipos de plásticos, borrachas e materiais fibrosos são polímeros sintéticos, e de fato, desde o final da segunda grande guerra o campo do desenvolvimento de materiais tem sido virtualmente revolucionado pelo advento dos polímeros sintéticos. Estes podem ser produzidos com um custo relativamente baixo, e suas propriedades ainda podem ser manipuladas de maneira a terem um desempenho bem superior aos encontrados na natureza. É notória a constante substituição de metal e madeira por plásticos em várias aplicações práticas, por possuírem propriedades satisfatórias e custo inferior.

A literatura especializada apresenta várias formas de classificação para os polímeros, como observa-se em [21], [119] e [22]. Pode-se classificá-los quanto à composição química, aplicabilidade tecnológica e comportamento mecânico dentre outros. Focando as atenções no desempenho mecânico, os polímeros são didaticamente divididos em três grandes grupos: plásticos, elastômeros e fibras.

Os plásticos, à temperatura ambiente, tem a característica de serem sólidos e sua composição química ser baseada em cadeias poliméricas que em sua maioria possuem alguns componentes adicionais com a finalidade de fornecer-lhes características especiais. Podem, ainda, serem subdivididos em termoplásticos e termofixos. Os termoplásticos são polímeros que possuem ligações não cruzadas, e quando sob o efeito conjugado da temperatura e da pressão, amolecem e se fluidizam. Porém, retomadas as condições iniciais (temperatura e pressão) se solidificam. Este ciclo pode ser refeito várias vezes, podendo assim serem reutilizados em diversas aplicações, o que lhes dá o adjetivo *recicláveis*. Pode-se citar como exemplos: o polietileno, o polipropileno e o PVC (policloreto de vinila). Os termofixos são polímeros que inicialmente possuem ligações não cruzadas, e quando submetidos ao aumento da temperatura e pressão, amolecem e se fluidizam, porém diferentemente dos termoplásticos, neste momento ocorre uma reação química interna que forma ligações cruzadas entre as cadeias, culminando em sua solidificação. Qualquer outra alteração de temperatura ou pressão não tem mais influência alguma sobre este estado. Um exemplo bem comum deste tipo de polímero é a resina epóxi.

Os elastômeros são polímeros que apresentam o fenômeno da fluidização e, como nos termofixos, há formação de ligações cruzadas fazendo cessar a fluidização e retornar a sua forma inicial. Exibem elasticidade em longas faixas de deformação na temperatura ambiente após o processo de vulcanização (formação de ligações cruzadas via o elemento enxofre), e como exemplo típico deste polímero pode-se citar a borracha.

Muitas fibras, por sua vez, são termoplásticos que possuem uma característica geométrica peculiar em sua forma, i.e., a razão entre o comprimento e o diâmetro efetivo da seção transversal do seu corpo serem superior ou igual a 100. Estes tipos de fibras de polímeros são largamente utilizadas na indústria textil e são sujeitas a vários tipos de solicitações como estiramento, torção, cisalhamento e abrasão. As fibras têm elevadas resistência mecânica e à abrasão e um alto módulo de elasticidade. Tais polímeros possuem também um grau de cristalinidade relativamente alto e um elevado peso molecular. Alguns exemplos comuns são o nylon e o poliéster.

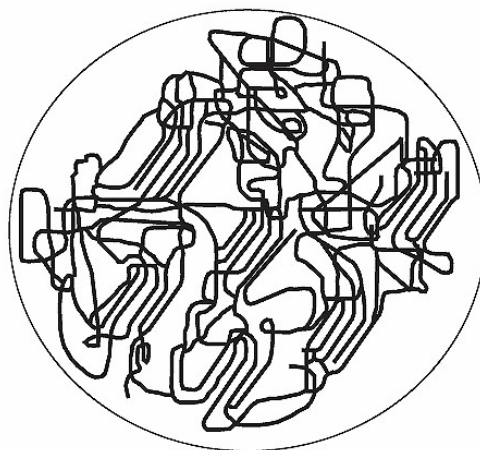
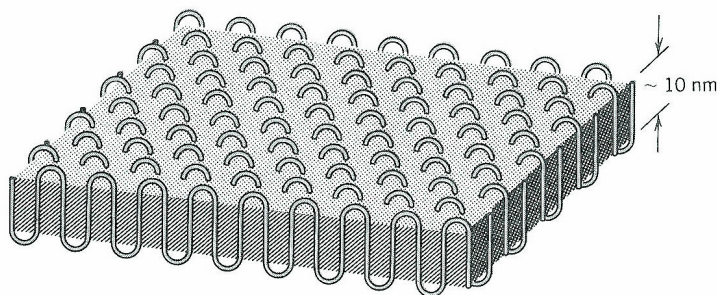


Figura 1.5: Estrutura amorfa

Figura 1.6: Estrutura cristalina (*micelle*)

1.2.1 Estrutura Polimérica

Sólidos poliméricos são constituídos pelos estados amorfo e cristalino, podendo ainda se apresentar num estado totalmente amorfo. Polímeros no estado amorfo são caracterizados por arranjos desordenados das cadeias moleculares, como pode ser visto esquematicamente na figura 1.5. Já o estado cristalino é caracterizado por um ordenamento longo (centenas ou milhares de vezes o tamanho molecular de uma unidade) e tridimensional das cadeias moleculares. As cadeias macromoleculares neste estado apresentam formas zigzag ou helicoidais. Estas cadeias são alinhadas paralelamente uma à outra formando um compacto tridimensional (veja 1.6). Sólidos poliméricos são em sua maioria referenciados como semicristalinos, pois em quaisquer regiões ocupadas pelas cadeias poliméricas ou por parte delas, um arranjo ordenado e regular irá coexistir com regiões desordenadas, típicas do estado amorfo (ver 1.7). Um modelo amplamente aceito para tanto é o chamado *fringer-micelle model* (ver [21]), o qual propõe que um polímero semicristalino consiste de pequenas regiões cristalinas (*micelles*), com um alinhamento bem definido, e envoltas por uma matriz amorfa composta de moléculas orientadas randomicamente, i.e. uma simples cadeia molecular pode passar através de várias *micelles* assim como pela região amorfa. Uma observação importante que ainda deve ser feita é de que muitos polímeros tem a capacidade

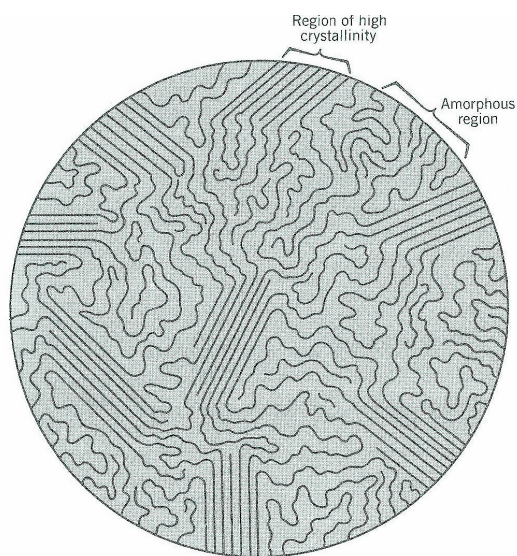
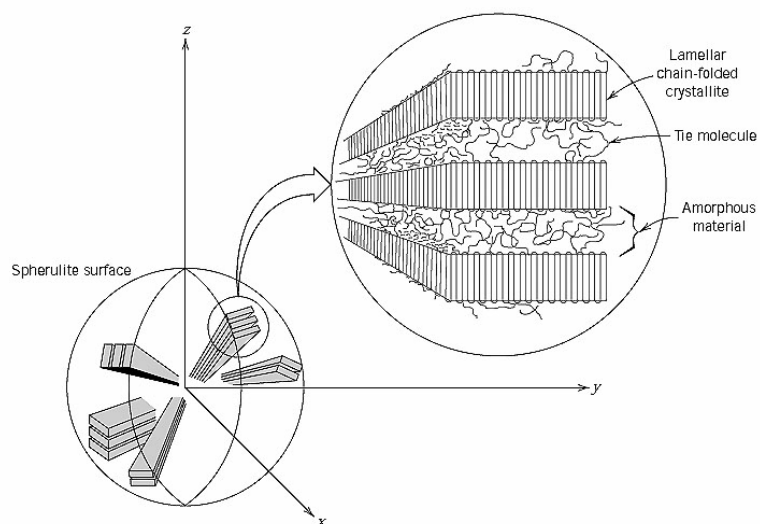


Figura 1.7: Polímero semicristalino ([21])

Figura 1.8: Representação esquemática da estrutura de uma *esferulite* ([21])

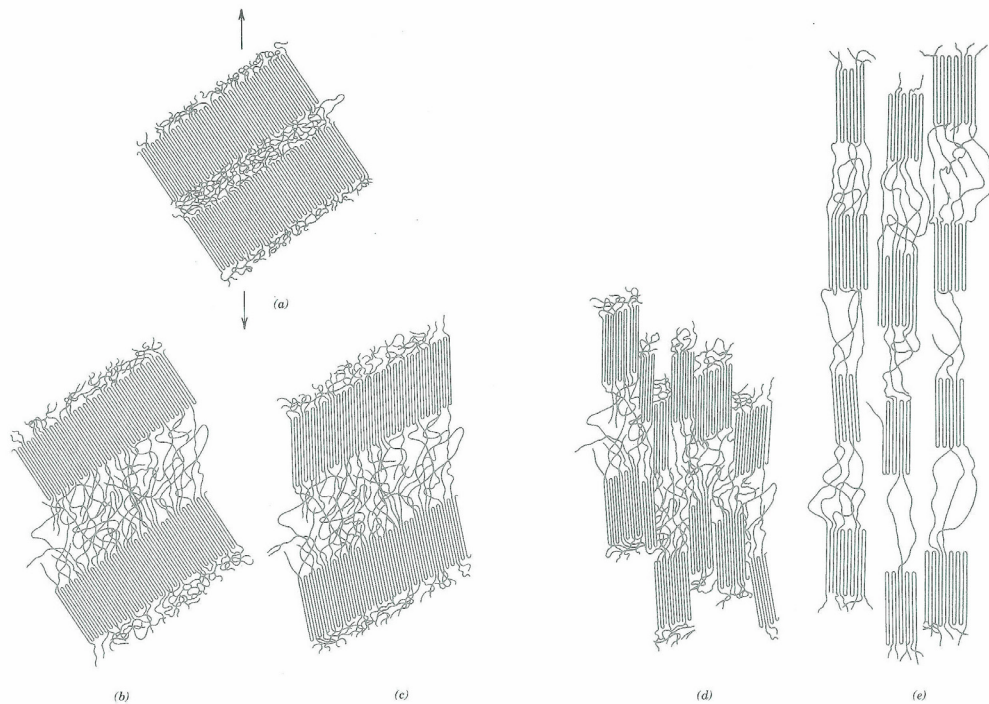


Figura 1.9: Mecanismo de deformação ([21])

de *cristalizar-se* e esta capacidade depende basicamente da estrutura e regularidade das cadeias assim como das interações entre elas. Um grande número de polímeros são cristalizados em forma de *esferulites*. Como o próprio nome sugere, cada *esferulite* pode crescer em uma forma esférica. As *esferulites* são consideradas de maneira análoga aos grãos em metais e cerâmicas policristalinas. Todavia, cada *esferulite* é composta de muitas placas cristalinas diferentes em adição a algum material amorfo (ver fig. 1.8).

Supondo, novamente, uma barra fina de sólido polimérico sujeito a um carregamento trativo. O mecanismo de deformação é melhor descrito pelas interações entre as placas cristalinas e o intervento da região amorfa em resposta a um carregamento aplicado. Durante o estágio inicial de deformação as placas cristalinas simplesmente afastam-se uma das outras e a região amorfa é estendida. O segundo estágio caracteriza-se por um alinhamento de cada placa cristalina e das cadeias na região amorfa com o eixo tensivo. No próximo estágio ocorre um deslizamento relativo dentro de cada um dos blocos oriundos da placa cristalina, estando estes ainda ligados a outros por cadeias da região amorfa. No estágio final estes blocos e as cadeias da região amorfa ficam orientados com o eixo tensivo, o que permite concluir que deformações consideráveis em polímeros semicristalinos produzem uma estrutura altamente orientada, e é claro que durante este processo as *esferulites* também sofrem mudanças consideráveis em sua forma (observe a fig. 1.9).

As características mecânicas de polímeros semicristalinos podem estar sujeitas a modificações, por exemplo, o aumento do grau de ligações cruzadas inibirá o movimento relativo entre as cadeias aumentando então a resistência mecânica do polímero. As ligações cruzadas podem

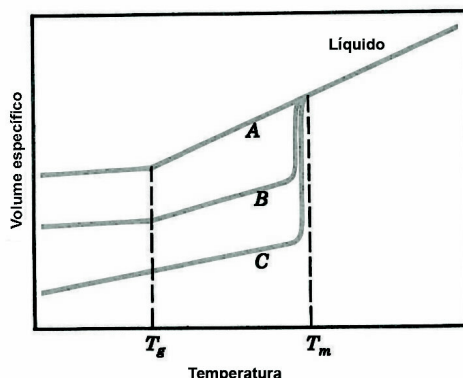


Figura 1.10: Volume específico vs. temperatura

ser promovidas, também, pela exposição do polímero a certos tipos de radiação. O fato é que as propriedades mecânicas de um polímero são altamente dependentes das forças intermoleculares fracas (*van der Waals*) e para um tipo específico de polímero, o grau de cristalinidade também pode ter uma influência significativa nas propriedades mecânicas, valendo ainda ressaltar que o peso molecular das cadeias é também uma característica de grande importância no comportamento mecânico do polímero.

1.2.2 O Efeito da Temperatura

As propriedades mecânicas dos polímeros são sensíveis a mudanças de temperatura. Devido a este fato, deve-se saber qual será seu comportamento à temperatura de trabalho especificada, veja a figura seguinte (1.10). A primeira questão que vem a tona diz respeito ao fenômeno de transição do *estado vítreo* (*glass state* $T < T_g$) para o estado borrachoso (*rubbery state* $T_g < T < T_m$). As temperaturas de transição T_g (temperatura de vitrificação) e T_m (temperatura de derretimento) são determinadas da mesma maneira que em materiais cerâmicos, ou seja, pelo gráfico de temperatura versus volume específico.

Os polímeros cristalinos (graf. C) apresentam uma mudança descontínua no volume específico na temperatura de derretimento, assim como os polímeros semicristalinos (graf. B), que a apresentam de uma forma bem menos acentuada. Porém, no caso de polímeros totalmente amorfos (graf. A), a variação do volume específico com temperatura é contínua. A região abaixo de T_g implica que o material é considerado como um sólido amorfo e acima desta temperatura o material é dito estar em estado borrachoso, ou em um estado líquido viscoso no caso da temperatura estar acima de T_m . Abaixo de T_g um polímero tensionado se comportará como um sólido frágil, não apresentando um comportamento viscoelástico e também nenhuma deformação plástica anterior a sua fratura. Já na região próximo a T_g haverá alguma deformação plástica em altos níveis de tensão, porém nenhum comportamento viscoelástico significativo será observado. Acima da temperatura T_g é esperado um comportamento viscoelástico bem mais significativo, o que constitui o campo de aplicação deste trabalho (mais especificamente entre T_g e T_m), muito embora não se vá levar em consideração aqui os efeitos térmicos inerentes a um valor específico

de temperatura. Vale ressaltar ainda que os valores de T_g e T_m podem variar muito de polímero para polímero. Em um dado polímero estes valores são determinados por fatores como a capacidade das cadeias de formar forças de *van der Waals* e o peso molecular destas cadeias dentre outros fatores. Além disso, outro fator relevante é o processo de fabricação do componente polimérico. Conforme a necessidade, pode-se fazer o polímero atingir uma determinada faixa de temperatura para processá-lo.

1.3 Espumas Poliméricas

Há diversos tipos de aplicações de polímeros no nosso cotidiano e na indústria, como já evidenciado nos tópicos anteriores, dentre estas pode-se citar os revestimentos (tinta, verniz, etc.), os adesivos (breu, goma, cola, etc.), filmes finos (espessuras de 0,025 a 0,125 mm) amplamente utilizados na fabricação de sacolas, embalagens alimentícias, produtos têxteis, etc e as chamadas *espumas* que podem ser constituídas de plásticos ou borrachas.

As espumas poliméricas são produzidas por processo chamado de *foaming* em que um agente borbulhante é acrescido ao material e então são expostos a ação do calor. O agente então decompõe-se com a geração de bolhas de gás nesta, agora, massa líquida que seguida de um resfriamento acaba por originar a estrutura porosa final. O mesmo tipo de efeito pode ser obtido pelo borbulhamento de um gás inerte através do material derretido. Alguns exemplos de polímeros constituintes de espumas são o poliuretano, poliestireno, borrachas e o PVC. A densidade final obtida para a espuma, pode chegar a uma redução de 200 vezes em comparação com o polímero em seu estado sólido original.

1.3.1 Sólidos Celulares

A literatura nos apresenta diversos tipos de espumas: poliméricas (utilizadas como absorvedores de impacto, como isolante térmico e/ou acústico, etc.), metálicas (utilizadas como absorvedores de impacto, como catalisadores em processos de filtração e também como dissipadores de calor.) e as cerâmicas (de baixa densidade, baixa condutividade térmica e acústica em comparação aos materiais cerâmicos convencionais). Todos estes tipos de espumas encaixam-se dentro de uma classe de sólidos designados como *sólidos celulares*. Estes sólidos são vistos como uma estrutura interligada de elementos sólidos que formam as bordas/placas constituintes das paredes das células. Em sua configuração mais básica o que se tem é uma disposição bidimensional de polígonos que preenchem todo o domínio (ver 1.11). Estas configurações mais simples são as chamadas espumas, em que as células são poliedros. Pode-se ainda classificar as espumas segundo a sua composição em células abertas (células com arestas e sem faces) e em células fechadas (células com arestas e com faces), conforme ilustrado nas figuras 1.12, 1.13 e 1.14.

É importante salientar ainda que diversos modelos constitutivos empregados em *softwares* comerciais não representam de modo adequado algumas aplicações em que as espumas poliméricas estão sujeitas à grandes deformações (ver [52]). Neste sentido também foram realizados trabalhos para espumas metálicas (ver [56]) nos quais verificou-se que quando os resultados numéricos eram comparados aos resultados experimentais, nenhum dos modelos dos pacotes

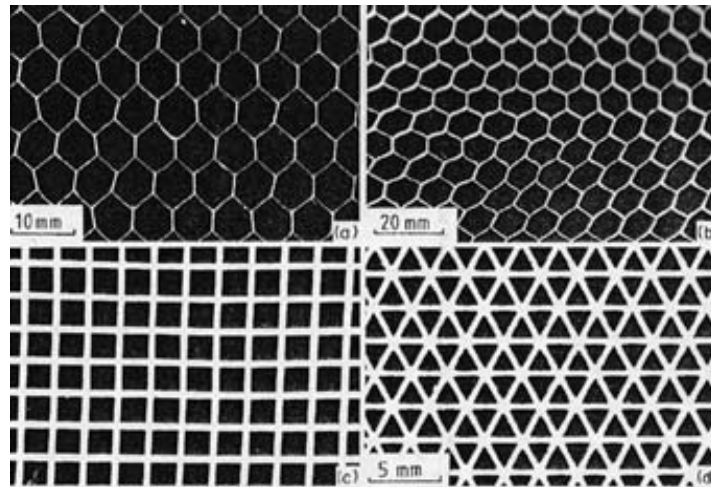


Figura 1.11: Materiais celulares bidimensionais: (a) colméia em alumínio; (b) colméia em papel com resina fenólica; (c) colméia cerâmica; (d) colméia cerâmica. [48].

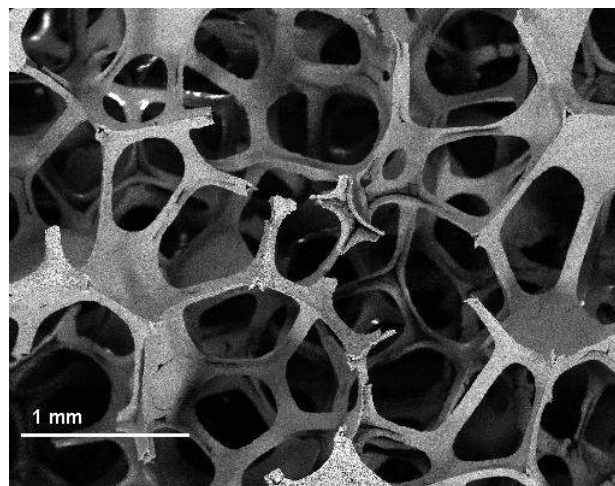


Figura 1.12: Espuma cerâmica com células abertas (DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).

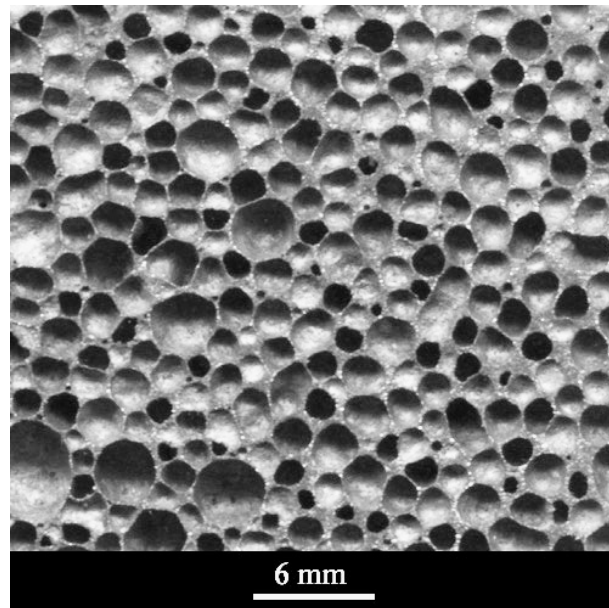


Figura 1.13: Espuma de alumínio com células fechadas (DoITPoMS Micrograph Library, University of Cambridge).

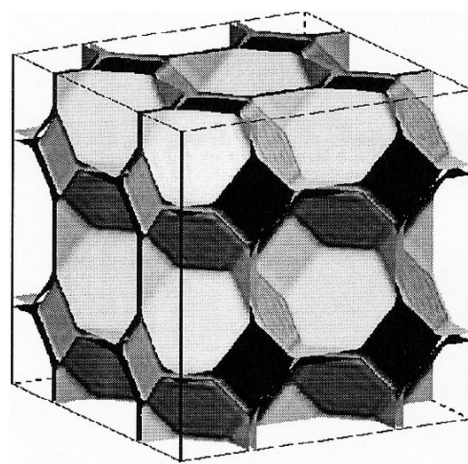


Figura 1.14: *The tetrakaidecahedral model / the Voronoi tessellation* para células fechadas ([89])

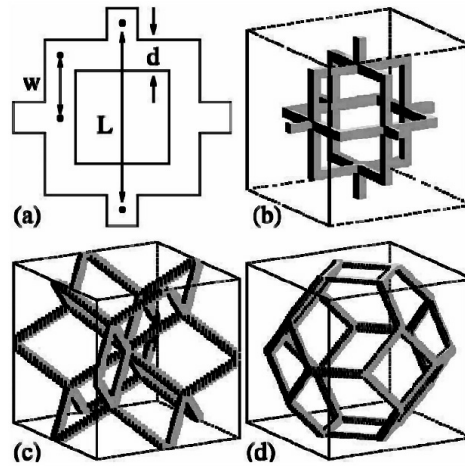


Figura 1.15: Modelos periódicos de células abertas. (a) parâmetros usados para definir um modelo simples. (b) Versão 3-D modelo simples. (c) Célula aberta considerada em [63]. (d) Unidade celular do *tetrakaidecahedral model*.

comerciais abordados foi capaz de representar de modo coerente os resultados esperados. A sensibilidade à taxa de deformação é um fenômeno notório em diversos casos, indicando a importância da incorporação deste tipo de efeito ao modelo ([104]).

Os efeitos de sensibilidade à taxa de deformação, os efeitos de variação de temperatura, assim como as características da configuração celular (tamanho da célula, espessura das paredes, etc.) são parâmetros importantes a serem considerados em aplicações com espumas (ver [49]). Vale ressaltar ainda que a microestrutura celular (fig. 1.15) e sua complexidade influencia bastante na caracterização das propriedades materiais das espumas (ver [49]), tais como o módulo de *Young*, a densidade, etc.

1.3.2 A Densidade Relativa (ρ^*)

Uma das características mais importantes dos materiais celulares é a sua densidade relativa $\rho^* = \frac{\rho}{\rho_M}$ (ρ -densidade atual do material celular e ρ_M -densidade do material totalmente (polímero) compactado), que tem forte influência sobre as suas demais propriedades. Este termo (densidade relativa) é naturalmente aplicado em materiais celulares devido a sua densidade ser computada em relação ao volume do material expandido e não somente em relação ao volume da parte sólida da estrutura. Para citar alguns exemplos, observe:

Espumas especiais	$\rho^* \simeq 0,001$;	(1.1)
Espumas poliméricas convencionais	$\rho^* \in [0,05, 0,2]$;	
Cortiças	$\rho^* \simeq 0,14$;	
Madeira	$\rho^* \in [0,15, 0,4]$.	

Segundo o trabalho de [73], um valor de densidade relativa da ordem de 0,3 é considerado um valor de transição, uma vez que os materiais são considerados celulares quando $\rho^* < 0,3$ e quando $\rho^* > 0,3$ estes materiais são considerados como sólidos contendo apenas alguns

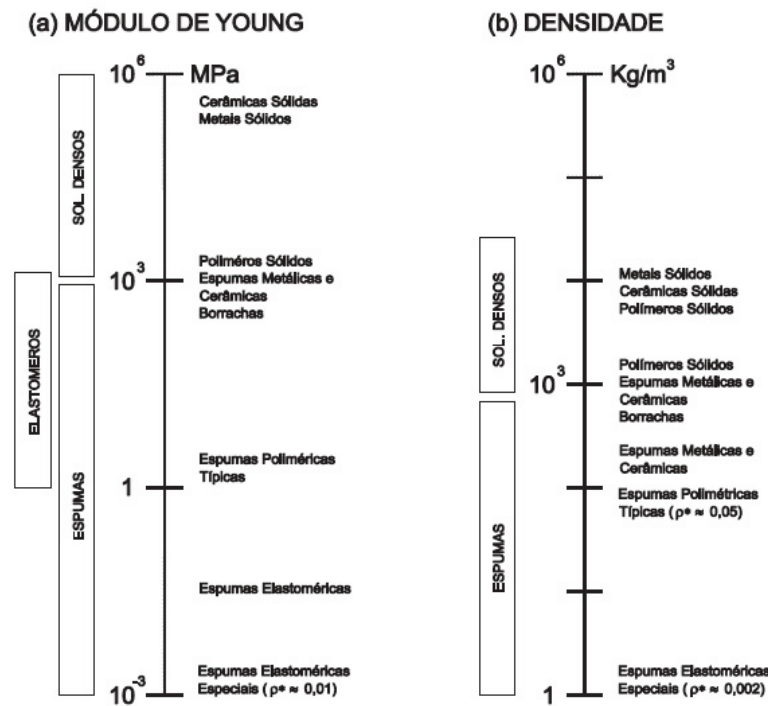


Figura 1.16: Algumas propriedades dos materiais celulares ([73])

poros isolados. Vale ressaltar que segundo o trabalho de [103] as espumas tem uma anisotropia relativamente baixa (E varia menos de 10% com a direção do carregamento), e que devido a isto os modelos para sólidos celulares isotrópicos mostram-se bem razoáveis. Porém, a literatura também relata que o módulo de Young E tem uma forte dependência com a densidade ($E = E(\rho)$). A aleatoriedade da distribuição das células possui também uma grande influência nas propriedades dos sólidos celulares. Deste ponto de vista fica claro que modelos randômicos complexos são necessários para se poder estimar o comportamento mais preciso dos sólidos celulares (ver [88] e [89]). Há, segundo estes trabalhos, duas etapas principais no desenvolvimento destes modelos randômicos. Primeira, um modelo suficientemente apurado de microestrutura deve ser desenvolvido. A segunda etapa refere-se a avaliação cuidadosa das propriedades do modelo. Assim, como os cálculos analíticos exatos para avaliar de uma forma geral os materiais randômicos ainda não estão consolidados, os métodos numéricos tornam-se extremamente importantes.

Capítulo 2

Teoria Viscoelástica Finita

A finalidade deste capítulo é a apresentação da formulação viscoelástica finita assim como os resultados alcançados com a sua implementação. Inicialmente serão feitos alguns comentários sobre os tipos de modelos constitutivos e posteriormente serão apresentados os equacionamentos e desenvolvimentos algébricos dos modelos abordados. Finalizando o capítulo encontram-se alguns exemplos numéricos estudados que servem para avaliar o modelo e os algoritmos implementados.

2.1 Relações Constitutivas Hereditárias

O propósito deste tópico é a exposição dos diferentes tipos de equações constitutivas para viscoelasticidade. Os materiais viscoelásticos são ditos possuidores de memória. Esta memória se manifesta na relação constitutiva entre os tensores tensão e deformação, neste caso a tensão pode ser representada como um funcional da história da deformação no qual o princípio da objetividade é satisfeito. Há, de um modo geral, duas categorias de modelos constitutivos para materiais viscoelásticos: os integrais e os diferenciais. Matematicamente nos modelos integrais a tensão em um determinado instante de tempo é dada em termos de uma expressão que envolve uma integral sobre toda a história no tempo, esta integral é normalmente referenciada como a integral da história (integrais de convolução, equações integrodiferenciais de Volterra e derivadas fracionárias, ver [62] e [40]), em contraste, o modelo constitutivo diferencial da história da deformação é feita via equações diferenciais ordinárias que envolvem variáveis internas dependentes do tempo (ver [86]).

A idéia deste capítulo é apresentar, como já mencionado, o modelo viscoelástico para grandes deformações, assim como a estratégia numérica para abordá-lo. A forma em taxa da equação constitutiva é equacionada em termos da taxa de *Green-Naghdi* associada ao tensor tensão rotacionado de *Kirchhoff* e da taxa do tensor logaritmo de deformação de *Hencky*.

O princípio da superposição de *Boltzmann* segue da consideração de que a superposição dos incrementos na tensão está relacionada com os respectivos incrementos na deformação de um modo similar ao dado pela lei de Hooke.

A teoria clássica da elasticidade linear considera a relação constitutiva, entre os tensores

tensão e deformação, dada pela lei de Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \mathbb{D}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (2.1)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão de *Cauchy*, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor deformação infinitesimal e \mathbb{D} é um tensor positivo definido de quarta ordem satisfazendo as seguintes propriedades de simetria

$$\mathbb{D}_{ijkl} = [\mathbb{D}]_{ijkl} = [\mathbb{D}]_{jikl}, \quad [\mathbb{D}]_{ijkl} = [\mathbb{D}]_{ijlk} \text{ e } [\mathbb{D}]_{ijkl} = [\mathbb{D}]_{klij}. \quad (2.2)$$

As duas primeiras relações seguem da simetria de $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$, enquanto que a terceira segue de considerações energéticas. Porém em viscoelasticidade a terceira destas relações é aplicada somente quando o material é mecânicamente isotrópico.

Uma maneira, como já comentado, de se obter uma relação constitutiva para materiais viscoelásticos é imaginar a superposição de Boltzmann (dada pelo operador de Boltzmann) aplicada sobre incrementos de tensão, que são relacionados, de forma semelhante à lei de Hook, a incrementos de deformação correspondentes. Por exemplo suponha que o corpo \mathcal{B} para $t < 0$ é tal que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$, e que para $t = 0$ tem-se o estado de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{0}, t)$. Então o estado de tensão resultante para $t \geq 0$ é dado por

$$\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbb{D}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0), \quad (2.3)$$

na qual a dependência temporal é introduzida somente pelo tensor \mathbb{D} . Fisicamente espera-se que \mathbb{D} seja suave e monotonicamente decrescente com o tempo t , pois não seria possível que o estado de tensões $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ crescesse, exorbitantemente, com o tempo para um estado de deformações fixo $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0)$. De fato, experimentos com polímeros mostram que $\mathbb{D}(t)$ decresce e este fenômeno é conhecido como *relaxação de tensões*.

Tomando, agora, um pequeno intervalo de tempo Δt , e denotando $t_i := i\Delta t$, aproxima-se a evolução do tensor deformação como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

obtendo, então, o incremento de deformação

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_{i+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_{i+1}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_i), \quad (2.5)$$

o que induz o seguinte incremento de tensão:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_j(\mathbf{x}, t_i) = \mathbb{D}(t_i - t_j) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_i), \quad \text{para } 1 \leq j \leq i. \quad (2.6)$$

Supõe-se então que a tensão total no tempo t_i é dada pela superposição:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_i) = \boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}, t_i) + \sum_{j=1}^i \Delta \boldsymbol{\sigma}_j(\mathbf{x}, t_i); \quad (2.7)$$

$$= \mathbb{D}(t_i) \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \sum_{j=1}^i \mathbb{D}(t_i - t_j) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_i). \quad (2.8)$$

Tomando, apropriadamente, o limite obtem-se a lei constitutiva hereditária

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{D}(t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \mathbb{D}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, s)) ds. \quad (2.9)$$

Supondo que $\mathbb{D}(t)$ é suave, pode-se derivar a forma alternativa

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{D}(0) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \dot{\mathbb{D}}(t-s) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, s)) ds, \quad (2.10)$$

em que $\dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbb{D}}$ indica a derivada parcial com respeito à *variável de história* s e \mathbf{x} indica o vetor posição em \mathbb{R}^3 (na configuração atual). O que se tem, agora, é que o comportamento do material está intimamente ligado a maneira como o tensor \mathbb{D} depende do tempo t . A determinação destas relações possui um forte embasamento físico e intuitivo. Há na literatura especializada várias propostas nesse sentido (ver [4], [28] e [44]), dentre as quais os modelos baseados no *sólido de Maxwell* (*The Reversed Maxwell Solid*, *The Generalized Maxwell Solid*, ...) (ver [45]) tem recebido grande destaque. A idéia central deste modelo é que os tensores $\mathbb{D}(t)$ são atualizados por séries de *Dirichlet-Prony*

$$\mathbb{D}(t) = f(t) \mathbb{D}(0), \quad (2.11)$$

em que $f(t)$ é da seguinte forma

$$f(t) = f_0 + \sum_{i=1}^N f_i e^{-\varpi_i t}. \quad (2.12)$$

Os coeficientes $\{f_i\}_{i=0}^N$ são não negativos e normalizados de modo que $f(0) = 1$, além disto os coeficientes $\{\varpi_i\}_{i=0}^N$ também são não negativos. Seguindo esta idéia pode-se escrever então

$$\mathbb{D}_{ijkl}(t) = (\mathbb{D}_{ijkl})_0 + \sum_{m=1}^{N_{ijkl}} (\mathbb{D}_{ijkl})_m e^{-[(\varpi_{ijkl})_m]t}. \quad (2.13)$$

Estas séries são extremamente convenientes para a abordagem dos problemas apresentados, pois desde que

$$f(t) = e^{-\varpi t}, \quad (2.14)$$

tem-se recursivamente a atualização do termo de história vindo da discretização da equação de Volterra

$$f(t+k) = e^{-\varpi k} f(t). \quad (2.15)$$

Numericamente os problemas de Volterra exigem que a cada nível de tempo se tenha armazenada toda a história das soluções (níveis de tempo anteriores), que deve ser somada de modo a aproximar a integral da história. De uma forma geral o número de operações requeridas, para tal, em um nível de tempo N é da ordem $O(N^2)$. A utilização das séries de Dirichlet-Prony geralmente faz com que este número de operações diminua. Todavia estas séries não são a única forma de se modelar tal efeito, por exemplo em [16] utilizou-se as chamadas *stretched relaxation function*

$$f(t) = f_0 e^{-(\varpi t)^p}, \text{ para } p \in (0, 1], \quad (2.16)$$

que, obviamente, não possui uma forma de recorrência simples. Uma outra escolha, bem difundida atualmente, para f são as *baixas potências*

$$f(t) = f_0 t^{-p}, \text{ para } p \in (0, 1), \quad (2.17)$$

todavia, o que se nota é uma inconsistência física nos valores da tensão e da deformação no tempo $t = 0$. Objetivando abordagem fisicamente consistente, tem-se a seguinte modificação

$$f(t) = f_0 (t + f_1)^{-p}, \text{ para } p \in (0, 1), \quad (2.18)$$

em que $f_1 \geq 0$.

A formulação que segue a partir desse ponto é fortemente baseada no trabalho de [27], que explora as idéias do cálculo fracionário. Infelizmente um enfoque mais profundo a respeito desta teoria constitutiva não será adotado aqui, por não se tratar do objetivo principal deste trabalho. Será apresentada, então, uma vista geral da teoria sem um rigor mais apurado. A idéia central desta formulação está ligada ao fato de que os materiais viscoelásticos comportam-se de uma forma intermediária entre sólido e fluido. Recordando agora que o tensor tensão depende linearmente do tensor deformação, para sólidos elásticos, enquanto que no caso de fluidos o tensor tensão depende linearmente do tensor taxa de deformação para fluidos Newtonianos. Intuitivamente pode-se interpretar esse comportamento híbrido através da incorporação de uma derivada fracionária temporal na equação constitutiva. Para tanto seguem as definições

Definição 1 *Sejam $f \in L_1$ e $v \in \mathbb{R}_+$. A integral de Riemann-Liouville de ordem fracionária v da função f é definida como*

$$I_a^v f(x) := \int_a^x \frac{(x-s)^{v-1}}{\Gamma(v)} f(s) ds, \quad (2.19)$$

e quando $a = 0$, denota-se por $I^v f(x) = I_0^v f(x) = f(x) \phi_v(x)$, em que $\phi_v(x) = x^{v-1}/\Gamma(v)$, para $x > 0$, $\phi_v(x) = 0$, para $x \leq 0$, e $\phi_v(x) \xrightarrow{v \rightarrow 0} \delta(x)$ (Delta de Dirac), $I^v f(x) \xrightarrow{v \rightarrow 0} f(x)$

Definição 2 *A derivada ∂^ζ de ordem fracionária $\zeta \in (0, 1)$ da função absolutamente contínua f é definida como*

$$\partial_a^\zeta f(x) := I_a^{1-\zeta} \partial f(x), \quad (2.20)$$

e a derivada ∂^ζ de ordem fracionária $\zeta \in (n-1, n)$, da função f , suficientemente regular

$(\partial^{n-1}f(x))$ absolutamente contínua) é dada por

$$\partial_a^\zeta f(x) := I_a^{n-\theta} \partial^n f(x). \quad (2.21)$$

Aceitando a natureza híbrida dos materiais viscoelásticos, a idéia é definir uma lei constitutiva com a seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) := \mathbb{D}_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{D}_1 \partial_t^\zeta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \quad (2.22)$$

para tensores constantes de quarta ordem \mathbb{D}_0 e \mathbb{D}_1 , em que $\zeta \in [0, 1]$, assim:

$$\begin{aligned} \partial_t^\zeta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &:= I^{1-\zeta} \partial_t \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t); \\ &= \int_0^t \frac{(t-s)^{-\zeta}}{\Gamma(1-\zeta)} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, s)}{\partial s} ds. \end{aligned} \quad (2.23)$$

O que se tem agora são várias teorias constitutivas que podem gerar uma variedade de equações integrodiferenciais, as quais são usadas na abordagem de problemas viscoelásticos. A integração temporal da equação constitutiva em forma de taxa permite-se chegar a uma equação constitutiva na forma integrodiferencial.

A aplicação de deformações finitas neste trabalho será formulada em termos do tensor tensão rotacionado de Kirchhoff e do tensor deformação logaritmo de Hencky (deformação natural), na configuração designada como *não rotacionada*. O material é considerado ser isotrópico e as funções de relaxamento associadas aos módulos mecânicos são representados pelas séries de Prony. O problema é formulado com uma abordagem *Lagrangeana total* e solucionado pelo método de elementos finitos. Um conjunto de problemas é resolvido a fim de testar o modelo proposto assim como a robustez e performance dos algoritmos implementados na discretização do problema.

2.2 Formulação Global do Modelo de Deformação Finita

2.2.1 Formulação Lagrangeana

Seja Ω_o , definido em t_o , um domínio limitado com uma fronteira Lipschitz $\partial\Omega_o$ sujeita a uma força de corpo prescrita \mathbf{b} definida em Ω_o , uma tração superficial prescrita definida em Γ_o^t e um deslocamento prescrito e definido em Γ_o^u , em que $\partial\Omega_o = \overline{\Gamma_o^u \cup \Gamma_o^t}$ e $\Gamma_o^u \cap \Gamma_o^t = \emptyset$.

Se a função de movimento $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t) = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) \quad \therefore \quad \mathbf{x}_o = \boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x}),$$

então o campo de deslocamento é definido como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) + \mathbf{x}_o \quad \therefore \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o,$$

em que

$$\Gamma^u = \varphi_t(\Gamma_o^u) \quad \text{e} \quad \Gamma^t = \varphi_t(\Gamma_o^t).$$

Tem-se agora os seguintes conjuntos, para cada $t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} Kin_u(\Omega_o) &= \left\{ \mathbf{u}_o : \Omega_o \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}_o \in [H^1(\Omega_o)]^3, \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o) \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \right\}; \\ Var_u(\Omega_o) &= \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \Omega_o \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{\mathbf{v}} \in [H^1(\Omega_o)]^3, \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o) = 0 \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Kin_u(\Omega_t) &= \left\{ \mathbf{u} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in [H^1(\Omega_t)]^3, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma^u \right\}; \\ Var_u(\Omega_t) &= \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{\mathbf{v}} \in [H^1(\Omega_t)]^3, \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0 \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma^u \right\} \end{aligned}$$

sendo $\mathbf{u}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o)$ em $\mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u$.

Formulação Forte do Problema: Ω_t - Configuração Atual

Problema 3 Para cada $t \in [0, t_f]$, determine $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ tal que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \text{ em } \mathbf{x} \in \Omega_t$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma^t$$

e

$$\mathbf{u}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \mathbf{u}_o \circ \varphi = \bar{\mathbf{u}} \circ \varphi \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u$$

com $\mathbf{t} \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^t)]^3$ e $\mathbf{b} \in [L_2(\Omega_t)]^3$. Perceba que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t)$ em $\mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u$. Adicionalmente, que a relação entre as normais nas configurações atual e de referência é expressa como

$$\mathbf{n} dA = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o. \quad (2.24)$$

Formulação Fraca do Problema: Ω_t - Configuração Atual

Problema 4 Determine $\mathbf{u} \in Kin_u(\Omega_t)$ tal que, para cada $t \in [0, t_f]$,

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla [\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) d\Omega_t + \int_{\Gamma^t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) dA \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in Var_u(\Omega_t).$$

Porém,

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o = \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o; \quad (2.25)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = \rho(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) J(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o. \quad (2.26)$$

Note ainda que $J(\mathbf{x}_o, t) = \det(\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t))$ logo

$$\rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = \rho(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) J(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o = \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o$$

em que $\rho_o(\mathbf{x}_o)$ denota a densidade na configuração de referência

$$\rho_o(\mathbf{x}_o) = \rho(\varphi(\mathbf{x}_o, 0), 0) J(\mathbf{x}_o, 0) = \rho(\varphi(\mathbf{x}_o, 0), 0) \quad \therefore \quad J(\mathbf{x}_o, 0) = 1$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t); \\ \frac{\partial \mathbf{u}_o}{\partial \mathbf{x}_o} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_o}, \end{aligned}$$

então

$$\nabla \mathbf{u}_o = [\nabla [\mathbf{u}_o \varphi]] \mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t). \quad (2.27)$$

Recordando a equação de conservação do momento linear na configuração atual, tem-se

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{x}} d\Omega_t \quad \forall \mathcal{B} \subset \Omega_t.$$

Considerando o caso quasi-estático, i.e., desprezando o termo $\frac{d}{dt}(\cdot)$, pode-se escrever

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = 0.$$

Todavia,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t &= \int_{\mathcal{B}_o} \rho(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) \mathbf{b}(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) J(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o; \\ &= \int_{\mathcal{B}_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o \end{aligned}$$

e

$$\int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \int_{\partial \mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA$$

com $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ em $\partial \mathcal{B}$ como condição de tração prescrita. Note ainda que,

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o = \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o \quad (2.28)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o; \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o \end{aligned}$$

e pelo uso de Eq.(2.24)

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dA = [\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o \det(\mathbf{F}) \, dA_o = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_o dA_o$$

consequentemente

$$\{\det(\mathbf{F}) [\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{F}^{-T} - \mathbf{P}\} \cdot \mathbf{n}_o dA_o = 0 \quad \forall \mathbf{n}_o \in \mathbb{R}^3,$$

então

$$\mathbf{P} = \det(\mathbf{F}) [\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi}] \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.29)$$

logo

$$[\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (2.30)$$

Assim

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \, dA = \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) \, dA_o = \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \cdot \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) \, dA_o = \int_{\Omega_o} \operatorname{div}(\mathbf{P}) \, d\Omega_o,$$

o que permite escrever

$$\int_{\Omega_o} [\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) + \rho_o(\mathbf{x}_o) \mathbf{b}(\mathbf{x}_o, t)] \, d\Omega_o = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) + \rho_o(\mathbf{x}_o) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_o, t) &= 0, & \text{em} & \mathbf{x}_o \in \Omega_o; \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \cdot \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) &= \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t), & \text{em} & \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^t; \\ \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) &= \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t), & \text{em} & \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \end{aligned}$$

que é a formulação forte do problema na configuração de referência. Desta forma é possível enunciar o problema da seguinte forma:

Problema 5 *Determine $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t)$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) + \rho_o(\mathbf{x}_o) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_o, t) &= 0, & \text{em} & \mathbf{x}_o \in \Omega_o; \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \cdot \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) &= \bar{\mathbf{t}}_o(\mathbf{x}_o, t), & \text{em} & \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^t; \\ \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) &= \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t), & \text{em} & \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \end{aligned}$$

com $\bar{\mathbf{t}}_o \in \left[H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_o^t) \right]^3$ e $\bar{\mathbf{b}} \in [L_2(\Omega_o)]^3$.

Formulação Fraca do Problema: Ω_o - Configuração de referência

Problema 6 *Determine $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) \in \text{Kin}_u(\Omega_o)$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que*

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dA_o, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_u(\Omega_o). \quad (2.31)$$

Denotando, para cada $t \in [0, t_f]$,

$$F(\mathbf{u}_o; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o$$

o problema pode ser reescrito como

Problema 7 Determine $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) \in \text{Kin}_u(\Omega_o)$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$F(\mathbf{u}_o; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_u(\Omega_o). \quad (2.32)$$

2.3 Formulação Incremental

Seja o campo de deslocamento representado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_n) &= \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_o & \therefore & \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_n); \\ \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_{n+1}) &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_o & \therefore & \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_{n+1}), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1} &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}; \\ \mathbf{F}_n &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_n, \end{aligned}$$

e desta forma tem-se as seguintes considerações:

- A configuração e as variáveis de estado são conhecidas em Ω_n ;
- As equações de equilíbrio são tomadas em Ω_{n+1} .

Então, em t_{n+1} , a formulação fraca do problema pode ser escrita como:

Problema 8 Determine $\mathbf{u}_{n+1} \in \text{Kin}_u(\Omega_o)$, tal que

$$F(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_u(\Omega_o), \quad (2.33)$$

em que

$$F(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o.$$

Objetivando a resolução do problema não linear anteriormente discriminado, aplica-se então o método de Newton.

2.3.1 Linearização e o Método de Newton

Considerando

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n, \quad k = 0$$

em que k denota a iteração de Newton, iniciada em $k = 0$, temos como estimativa inicial o último valor convergido do incremento anterior da variável \mathbf{u} , i.e., \mathbf{u}_n . Desta forma, na k -ésima iteração tem-se

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k.$$

Assim para se determinar $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ é imposta a condição

$$F \left(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}; \hat{\mathbf{v}} \right) = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in Var_o^u.$$

Agora, considerando $F(\cdot, \cdot)$ suficientemente suave temos

$$F \left(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}; \hat{\mathbf{v}} \right) = F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) = 0, \quad (2.34)$$

a qual, após uma expansão em Taylor de $F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right)$ em \mathbf{u}_{n+1}^k , pode ser aproximada por

$$F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \simeq F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) + DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right], \quad (2.35)$$

o que permite escrever

$$DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right] = -F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right). \quad (2.36)$$

Obtenção de $DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right]$

A definição da derivada de Gâteaux, conduz a

$$\begin{aligned} DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) - F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right)}{\epsilon}; \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left[F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Agora, como Ω_o é fixo pode-se escrever

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[F \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} \left[\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) : \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o \right] \Big|_{\epsilon=0}; \quad (2.37)$$

$$= \int_{\Omega_o} \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathbf{P} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right] \Big|_{\epsilon=0} : \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o. \quad (2.38)$$

Note porém que $\mathbf{P} = \mathbf{P} \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right)$, assim é possível escrever

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P} \left(\mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right) \Big|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right] \Big|_{\epsilon=0}. \quad (2.39)$$

Entretanto,

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right)$$

e consequentemente

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right),$$

o que implica em

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right).$$

Logo,

$$DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right] = \int_{\Omega_o} \mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) : \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o \quad (2.40)$$

com

$$\left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k}. \quad (2.41)$$

2.3.2 A Determinação do Módulo Tangente Gobal \mathbb{A}

Seja, agora, a seguinte definição em termos de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t)$, $\boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}_o, t) := \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t)$.

Assim,

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) = J(\mathbf{x}_o, t) \boldsymbol{\sigma}_m(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}_o, t) = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}_o, t),$$

logo

$$\left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} \left(\tau_{ip} F_{jp}^{-1} \right) = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} + \tau_{ip} \frac{\partial F_{jp}^{-1}}{\partial F_{kl}}. \quad (2.42)$$

Lembre-se ainda que,

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$$

consequentemente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right) \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} \right) &= 0; \\ \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} \right) &= -\mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right) \mathbf{F}^{-1}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_{jp}^{-1}}{\partial F_{kl}} \right) &= -F_{jm}^{-1} \frac{\partial F_{ms}}{\partial F_{kl}} F_{sp}^{-1} = -F_{jm}^{-1} \delta_{mk} \delta_{sl} F_{sp}^{-1}; \\ &= -F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}, \end{aligned}$$

assim tem-se o módulo tangente global

$$\left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (2.43)$$

O cálculo do módulo tangente global \mathbb{A} requer a determinação da derivada do tensor tensão de Kirchoff com relação ao gradiente da deformação (\mathbf{F}), o qual não será feito de forma direta e sim com o auxílio da regra da cadeia e de algumas manipulações tensoriais.

O tensor tensão rotacionado de Kirchhoff $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ é definido como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R})^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R} \quad (2.44)$$

logo

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{R})^T. \quad (2.45)$$

Desta forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (R_{im} \bar{\tau}_{ms} R_{ps}); \\ &= \frac{\partial R_{im}}{\partial F_{kl}} \bar{\tau}_{ms} R_{ps} + R_{im} \frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}} R_{ps} + R_{im} \bar{\tau}_{ms} \frac{\partial R_{ps}}{\partial F_{kl}} \end{aligned}$$

ou tensorialmente

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{F}}.$$

Assim recordando, define-se

$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}} = \hat{\mathbb{D}}_{mskl}, \quad (2.46)$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} &= \frac{\partial R_{im}}{\partial F_{kl}} \bar{\tau}_{ms} R_{ps} + R_{im} \hat{\mathbb{D}}_{mskl} R_{ps} + R_{im} \bar{\tau}_{ms} \frac{\partial R_{ps}}{\partial F_{kl}}; \\ \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{F}} &= \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{F}} \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \hat{\mathbb{D}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Neste ponto tem-se que a Eq.(2.46) será desenvolvida a partir da equação constitutiva para a configuração não rotacionada, restando agora a determinação do tensor de quarta ordem $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{F}}$ que segue de algebrismos sobre a decomposição polar do tensor \mathbf{F} (observar os trabalhos [107], [106] e [80]).

2.4 O Modelo Viscoelástico

Recordando dos pares conjugados tensão-deformação (ver [58]), tem-se para a potência específica (por unidade de massa) \dot{W} da tensão

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_o} (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_o} (\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2\rho_o} (\mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}) = \dots \quad (2.48)$$

que é invariante sob mudança dos pares conjugados tensão-deformação. Então, pode-se escrever os tensores tensão de Kirchhoff e de Kirchhoff rotacionado da forma seguinte

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R} \quad \therefore \bar{\tau}_{IJ} = R_{iI} \tau_{ij} R_{jJ}. \quad (2.49)$$

No caso de materiais isotrópicos, pode-se derivar a seguinte relação

$$\frac{1}{\rho_o} (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}) = \frac{1}{\rho_o} (\bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}). \quad (2.50)$$

Note que, $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_o} (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}) &= \frac{1}{\rho_o} (\mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T : \mathbf{D}); \\ &= \frac{1}{\rho_o} \text{tr}(\mathbf{R} \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T \mathbf{D}); \\ &= \frac{1}{\rho_o} \text{tr}(\bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}); \\ &= \frac{1}{\rho_o} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Dos resultados acima pode-se concluir que

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} \quad (2.51)$$

em que

$$\mathbf{E} = \ln(\mathbf{U}) \quad (2.52)$$

e

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t)}. \quad (2.53)$$

2.4.1 Forma do Modelo Viscoelástico Linear

Uma proposta de generalização do modelo unidimensional para um modelo tridimensional é apresentada em [43]. A generalização da relação constitutiva em três dimensões consiste apenas em uma simples substituição das tensões e das deformações unidimensionais, que são tensores de ordem zero, por tensores de ordem dois. O módulo de correspondência também deve ser substituído pelo tensor constitutivo de quarta ordem. Então, pode-se representar a maioria dos materiais viscoelásticos pela seguinte forma constitutiva (ver [50]):

$$\varepsilon_{ij}(t) = \mathbb{C}_{ijkl}(t - t_0) \sigma_{kl}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{C}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\sigma}_{kl}(\xi) d\xi. \quad (2.54)$$

Agora, para campos suficientemente suaves, tem-se

$$\frac{d}{d\xi} \{ \mathbb{C}_{ijkl}(t - \xi) \sigma_{kl}(\xi) \} = \dot{\mathbb{C}}_{ijkl}(t - \xi) \sigma_{kl}(\xi) + \mathbb{C}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\sigma}_{kl}(\xi) \quad (2.55)$$

integrando em ξ de t_0 a t ,

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\xi} \{ \mathbb{C}_{ijkl}(t - \xi) \sigma_{kl}(\xi) \} d\xi = \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{C}}_{ijkl}(t - \xi) \sigma_{kl}(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t \mathbb{C}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\sigma}_{kl}(\xi) d\xi. \quad (2.56)$$

Porém

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \frac{d}{d\xi} \{ \mathbb{C}_{ijkl}(t-\xi) \sigma_{kl}(\xi) \} d\xi &= \mathbb{C}_{ijkl}(t-\xi) \sigma_{kl}(\xi) \Big|_{t_0}^t; \\ &= \mathbb{C}_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) - \mathbb{C}_{ijkl}(t-t_0) \sigma_{kl}(t_0). \end{aligned} \quad (2.57)$$

o que permite escrever

$$\int_{t_0}^t \mathbb{C}_{ijkl}(t-\xi) \dot{\sigma}_{kl}(\xi) d\xi = - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{C}}_{ijkl}(t-\xi) \sigma_{kl}(\xi) d\xi + \mathbb{C}_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) - \mathbb{C}_{ijkl}(t-t_0) \sigma_{kl}(t_0) \quad (2.58)$$

substituindo 2.58 em 2.54, obtem-se

$$\varepsilon_{ij}(t) = \mathbb{C}_{ijkl}(0) \sigma_{kl}(t) - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{C}}_{ijkl}(t-\xi) \sigma_{kl}(\xi) d\xi. \quad (2.59)$$

Analogamente também pode-se escrever para um sólido viscoelástico linear

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbb{D}_{ijkl}(t-t_0) \varepsilon_{kl}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{D}_{ijkl}(t-\xi) \dot{\varepsilon}_{kl}(\xi) d\xi \quad (2.60)$$

ou equivalentemente

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbb{D}_{ijkl}(0) \varepsilon_{kl}(t) - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{D}}_{ijkl}(t-\xi) \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi.$$

Considerando-se as hipóteses de isotropia, tem-se

$$\mathbb{D} = 2 G \mathbb{I}_{dev} + K (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (2.61)$$

em que

$$\mathbb{I}_{dev} = \left\{ \mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right\} \quad (2.62)$$

com \mathbf{I} designando o tensor identidade de segunda ordem e \mathbb{I} o tensor identidade simétrico de quarta ordem, i.e.,

$$\mathbb{I} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \mathbf{I}_T) \quad (2.63)$$

com

$$[\mathbf{I}]_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl}; \quad (2.64)$$

$$[\mathbf{I}_T]_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (2.65)$$

A representação indicial é dada por

$$[\mathbb{D}]_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}); \quad (2.66)$$

e sua forma compacta por

$$\mathbb{D} = \left(K - \frac{2}{3} G \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + G (\mathbf{I} + \mathbf{I}_T). \quad (2.67)$$

Note que, para qualquer tensor de segunda ordem \mathbf{A} ,

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}; \quad (2.68)$$

$$\mathbb{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbb{I} = \text{sym}(\mathbf{A}); \quad (2.69)$$

$$\mathbf{I}_T : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}_T = \mathbf{A}^T; \quad (2.70)$$

e

$$\mathbf{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I} = \mathbf{A}. \quad (2.71)$$

O último resultado é válido também para qualquer tensor de quarta ordem.

Os módulos G e K podem ser expressos alternativamente por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.72)$$

e

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.73)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson e E é o módulo de *Young*. Assim tem-se que

$$[\mathbb{C}]_{ijkl} = [\mathbb{D}^{-1}]_{ijkl} = \left[\left(K - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \right]^{-1} \quad (2.74)$$

ou

$$\mathbb{C} = \frac{1}{9K}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{1}{2G}\mathbb{I}_{dev}; \quad (2.75)$$

ou ainda

$$\mathbb{C} = \frac{B}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{J}{2}\mathbb{I}_{dev} \quad (2.76)$$

com os módulos $B = \frac{1}{K}$ e $J = \frac{1}{G}$.

Voltando agora para a equação constitutiva dada em 2.54, tem-se

$$\varepsilon(t) = \mathbb{C}(t - t_0)\sigma(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{C}(t - \xi)\dot{\sigma}(\xi)d\xi. \quad (2.77)$$

Substituindo 2.61 em 2.77, deriva-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \left[\frac{J(t - t_0)}{2}\mathbb{I}_{dev} + \frac{B(t - t_0)}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right] \sigma(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t \left[\frac{J(t - \xi)}{2}\mathbb{I}_{dev} + \frac{B(t - \xi)}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right] \dot{\sigma}(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Definindo

$$\sigma^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev}\sigma(t) \quad \text{como a parte deviatórica da medida de tensão} \quad (2.79)$$

e

$$s(t) \equiv \frac{1}{3} \text{tr} [\sigma(t)] \quad \text{como a parte volumétrica da medida de tensão} \quad (2.80)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{1}{2} J(t-t_0) \sigma^D(t_0) + \frac{1}{3} B(t-t_0) s(t_0) \mathbf{I} \\ & + \int_{t_0}^t \left\{ \frac{1}{2} J(t-\xi) \dot{\sigma}^D(\xi) + \frac{1}{3} B(t-\xi) \dot{s}(\xi) \mathbf{I} \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Considerando $t_0 = 0$, 2.81 pode ser reescrita como

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} J(t) \sigma^D(0) + \frac{1}{3} B(t) s(0) \mathbf{I} + \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} J(t-\xi) \dot{\sigma}^D(\xi) + \frac{1}{3} B(t-\xi) \dot{s}(\xi) \mathbf{I} \right\} d\xi. \quad (2.82)$$

Denotando

$$e(t) = \frac{1}{3} B(t) s(0) + \int_0^t \frac{1}{3} B(t-\xi) \dot{s}(\xi) d\xi \quad (2.83)$$

e

$$\varepsilon^D(t) = \frac{1}{2} J(t) \sigma^D(0) + \int_0^t \frac{1}{2} J(t-\xi) \dot{\sigma}^D(\xi) d\xi. \quad (2.84)$$

obtem-se a seguinte decomposição do tensor deformação,

$$\varepsilon(t) = e(t) \mathbf{I} + \varepsilon^D(t) \quad (2.85)$$

em que $e(t)$ denota a parte hidrostática do tensor deformação e $\varepsilon^D(t)$ é a parte deviatórica.

Neste modelo as funções núcleos das convoluções são representadas por séries de Prony ([87]), da seguinte forma:

$$J(\xi) = J_0 + \sum_{i=1}^{n_J} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \quad (2.86)$$

e

$$B(\xi) = B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{\xi}{\tau_i^B} \right) \right)$$

no qual tem-se os módulos J_0 , J_i , B_0 e B_i , em que τ_i^J e τ_i^B são as relaxações temporais para as componentes da série de Prony. Como resultado, a decomposição do tensor deformação $\varepsilon(t)$ pode ser expressa como

$$\varepsilon(t) = e(t) \mathbf{I} + \varepsilon^D(t), \quad (2.87)$$

em que

$$\begin{aligned} \varepsilon^D(t) = & \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_J} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \sigma^D(0) \\ & + \int_0^t \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_J} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \dot{\sigma}^D(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.88)$$

e

$$\begin{aligned}
 e(t) = & \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right) \right] s(0) \\
 & + \int_0^t \frac{1}{3} \left\{ \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \dot{s}(\xi) \right\} d\xi.
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

Neste ponto pode-se introduzir a definição dos módulos relativos

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^J &= J_i / J_\infty \\
 \text{e} \\
 \alpha_i^B &= B_i / B_\infty
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

sendo

$$\begin{aligned}
 B_\infty &:= B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \\
 \text{e} \\
 J_\infty &:= J_0 + \sum_{i=1}^{n_J} J_i.
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Como resultado, as funções núcleo podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
 B(\xi) &= B_\infty \left[\alpha_0^B + \sum_{i=1}^{n_B} \alpha_i^B \left(1 - \exp \left(-\frac{\xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \\
 \text{e} \\
 J(\xi) &= J_\infty \left[\alpha_0^J + \sum_{i=1}^{n_J} \alpha_i^J \left(1 - \exp \left(-\frac{\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

A forma integral da equação constitutiva (2.87) pode cobrir os comportamentos elásticos nos casos limites de carregamento (instantâneo e muito lento). Adicionalmente note que pelas equações 2.88 e 2.89) as partes devitória e volumétrica da tensão podem representar comportamentos distintos no que diz respeito à relaxação, uma vez que o número de termos das séries de Prony n_B e n_J não são necessariamente os mesmos nem tão pouco os tempos de relaxação τ_i^B e τ_i^J .

2.4.2 Modelo de Viscoelasticidade Finita Geral

Suponha um par conjugado de medidas de tensão e de deformação Σ e γ respectivamente. Objetivando generalizar a equação constitutiva acima para problemas de deformação finita, se faz necessária a apresentação de algumas definições:

Definição 9 *Seja \mathbf{v} , \mathbf{A} , e \mathbb{A} (respectivamente tensores de primeira ordem, segunda ordem e quarta ordem), define-se a transformação "barra" da seguinte forma*

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{v}}(t) &= \boldsymbol{\Theta}(t)^T \mathbf{v}(t); \\
 \bar{\mathbf{A}}(t) &= \boldsymbol{\Theta}(t)^T \mathbf{A}(t) \boldsymbol{\Theta}(t); \\
 \bar{\mathbb{A}}(t) &= \boldsymbol{\Theta}(t)^T \boldsymbol{\Theta}(t)^T \mathbb{A}(t) \boldsymbol{\Theta}(t) \boldsymbol{\Theta}(t).
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

Da mecânica do contínuo tem-se ainda que

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}(t) &= \boldsymbol{\Theta}(t)^T \mathbf{F}(t); \\ \bar{\mathbf{D}}(t) &= \boldsymbol{\Theta}(t)^T \mathbf{D}(t) \boldsymbol{\Theta}(t),\end{aligned}\tag{2.94}$$

em que o tensor de segunda ordem $\boldsymbol{\Theta}(t)$ é solução do problema de valor inicial: Dado o tensor de segunda ordem antisimétrico $\boldsymbol{\Xi}(t)$, determine $\boldsymbol{\Theta}(t)$ tal que

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}(t) = \boldsymbol{\Xi}(t) \boldsymbol{\Theta}(t)\tag{2.95}$$

sujeito à condição inicial

$$\boldsymbol{\Theta}(0) = \mathbf{I}.\tag{2.96}$$

Consideramos aqui que $\boldsymbol{\Xi}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}(t)^T$, sendo $\mathbf{R}(t)$ determinado pela decomposição polar de $\mathbf{F}(t)$, i.e., $\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)$.

O tensor $\boldsymbol{\Theta}(t)$ é usado para definir uma configuração conveniente (preservando a objetividade) para a integração do modelo constitutivo. Nestes termos uma medida de deformação γ submetida à transformação acima fica da forma seguinte

$$\bar{\gamma}(t) = \boldsymbol{\Theta}(t)^T \gamma(t) \boldsymbol{\Theta}(t).\tag{2.97}$$

Percebendo ainda que a solução do problema de valor inicial acima é dado por

$$\boldsymbol{\Theta}(t) = \mathbf{R}(t)\tag{2.98}$$

pode-se mostrar que

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \boldsymbol{\Theta}(t)^T \overset{\square}{\gamma}(t) \boldsymbol{\Theta}(t)\tag{2.99}$$

em que $\overset{\square}{\gamma}$ denota a taxa de Green-Naghdi do tensor deformação logarítmica, dado por

$$\begin{aligned}\overset{\square}{\gamma} &= \mathbf{R} \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^T \gamma \mathbf{R}) \right\} \mathbf{R}^T; \\ &= \dot{\gamma} - \boldsymbol{\Xi} \gamma + \gamma \boldsymbol{\Xi}.\end{aligned}\tag{2.100}$$

Corolário 10 $\dot{\bar{\gamma}}(t) = \boldsymbol{\Theta}(t)^T \overset{\square}{\gamma}(t) \boldsymbol{\Theta}(t)$.

Dem. A definição de $\bar{\gamma}(t) = \boldsymbol{\Theta}(t)^T \gamma(t) \boldsymbol{\Theta}(t)$ permite a diferenciação em relação ao tempo, supondo os tensores suaves em relação ao tempo

$$\dot{\bar{\gamma}}(t) = \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t)^T \gamma(t) \boldsymbol{\Theta}(t) + \boldsymbol{\Theta}(t)^T \dot{\gamma}(t) \boldsymbol{\Theta}(t) + \boldsymbol{\Theta}(t)^T \gamma(t) \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t),\tag{2.101}$$

porém de 2.95

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}(t) = \boldsymbol{\Xi}(t) \boldsymbol{\Theta}(t)\tag{2.102}$$

e sabendo que $\Theta(t) = \mathbf{R}(t)$ e $\Xi^T = -\Xi$ (antisimetria), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}(t)^T &= \Theta(t)^T \Xi(t)^T; \\ &= -\Theta(t)^T \Xi(t)\end{aligned}\quad (2.103)$$

substituindo 2.102 e 2.103 em 2.101 pode-se escrever

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(t) &= -\Theta(t)^T \Xi(t) \gamma(t) \Theta(t) + \Theta(t)^T \dot{\gamma}(t) \Theta(t) + \Theta(t)^T \gamma(t) \Xi(t) \Theta(t); \\ &= \Theta(t)^T \{-\Xi(t) \gamma(t) + \dot{\gamma}(t) + \gamma(t) \Xi(t)\} \Theta(t); \\ &= \Theta(t)^T \bar{\gamma}(t) \Theta(t).\end{aligned}\quad (2.104)$$

■

Da introdução desta transformação "barra", pode-se escrever

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\mathbb{C}}(t) \bar{\Sigma}(0) + \int_0^t \bar{\mathbb{C}}(t-\xi) \dot{\bar{\Sigma}}(\xi) d\xi. \quad (2.105)$$

Considerando agora as hipóteses de isotropia do material, tem-se $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$. Lembrando-se que

$$\mathbb{C} = \frac{B}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{J}{2} \mathbb{I}_{dev} \quad (2.106)$$

com

$$\mathbb{I}_{dev} = \left\{ \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right\} \quad (2.107)$$

logo, substituído 2.106 em 2.105 obtém-se

$$\bar{\gamma}(t) = \left[\frac{B(t)}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{J(t)}{2} \mathbb{I}_{dev} \right] \bar{\Sigma}(0) + \int_0^t \left[\frac{B(t-\xi)}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{J(t-\xi)}{2} \mathbb{I}_{dev} \right] \dot{\bar{\Sigma}}(\xi) d\xi. \quad (2.108)$$

Definindo

$$\dot{\bar{\Sigma}}^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev} \dot{\bar{\Sigma}}(t) \quad \text{parte deviatórica da taxa da medida de tensão} \quad (2.109)$$

e

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}}(t) \equiv \frac{1}{3} \text{tr} \left[\dot{\bar{\Sigma}}(t) \right] \quad \text{parte volumétrica da taxa da medida de tensão}, \quad (2.110)$$

pode-se escrever

$$\bar{\gamma}(t) = \frac{B(t)}{3} \bar{\mathbf{p}}(0) \mathbf{I} + \frac{J(t)}{2} \bar{\Sigma}^D(0) + \int_0^t \left\{ \frac{B(t-\xi)}{3} \dot{\bar{\mathbf{p}}}(\xi) \mathbf{I} + \frac{J(t-\xi)}{2} \dot{\bar{\Sigma}}^D(\xi) \right\} d\xi. \quad (2.111)$$

Agora, denotando

$$\bar{\gamma}^H(t) = \frac{B(t)}{3} \bar{\mathbf{p}}(0) + \int_0^t \frac{B(t-\xi)}{3} \dot{\bar{\mathbf{p}}}(\xi) d\xi \quad (2.112)$$

e

$$\bar{\gamma}^D(t) = \frac{J(t)}{2} \bar{\Sigma}^D(0) + \int_0^t \frac{J(t-\xi)}{2} \dot{\bar{\Sigma}}^D(\xi) d\xi \quad (2.113)$$

o tensor deformação pode ser decomposto como

$$\bar{\gamma}(t) = \bar{\gamma}^H(t) \mathbf{I} + \bar{\gamma}^D(t) \quad (2.114)$$

em que $\bar{\gamma}^H(t)$ denota a parte hidrostática do tensor deformação e $\bar{\gamma}^D(t)$ sua parte deviatórica e as funções núcleos das convoluções acima são representadas em termos das séries de Prony:

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right); \quad (2.115)$$

$$B(t) = B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right). \quad (2.116)$$

Desta forma pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^D(t) &= \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \bar{\Sigma}^D(0) \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \dot{\bar{\Sigma}}^D(\xi) \right\} d\xi \end{aligned} \quad (2.117)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^H(t) &= \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \bar{\mathbf{p}}(0) \\ &+ \int_0^t \left\{ \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \dot{\bar{\mathbf{p}}}(\xi) \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (2.118)$$

2.4.3 Um Modelo Particular de Viscoelasticidade Finita

Observando que a medida de tensão de Kirchhoff rotacionada $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ e a medida de deformação logarítmica Lagrangiana \mathbf{E} , definida na configuração de referência Ω_o , formam um par conjugado e como pode-se ver na equação 2.50

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}, \quad (2.119)$$

com

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}; \quad (2.120)$$

$$\mathbf{E} = \ln(\mathbf{U}), \quad (2.121)$$

e

$$\bar{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{E}}, \quad (2.122)$$

a equação constitutiva pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathbf{E}(t) = \overline{\mathbb{C}}(t)\bar{\boldsymbol{\tau}}(0) + \int_0^t \overline{\mathbb{C}}(t-\xi)\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\xi)d\xi, \quad (2.123)$$

e novamente supondo a isotropia do material ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$), resulta que

$$\mathbf{E}(t) = \mathbb{C}(t)\bar{\boldsymbol{\tau}}(0) + \int_0^t \mathbb{C}(t-\xi)\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\xi)d\xi. \quad (2.124)$$

Assim, tem-se

$$\mathbf{E}(t) = \frac{B(t)}{3}\bar{p}(0)\mathbf{I} + \frac{J(t)}{2}\bar{\boldsymbol{\tau}}^D(0) + \int_0^t \left\{ \frac{B(t-\xi)}{3}\dot{\bar{p}}(\xi)\mathbf{I} + \frac{J(t-\xi)}{2}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^D(\xi) \right\} d\xi; \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \left[\frac{B(t)}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{J(t)}{2}\mathbb{I}_{dev} \right] \bar{\boldsymbol{\tau}}(0) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{B(t-\xi)}{9}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + \frac{J(t-\xi)}{2}\mathbb{I}_{dev} \right] \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\xi)d\xi, \end{aligned} \quad (2.126)$$

com

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(t), \quad (2.127)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev}\bar{\boldsymbol{\tau}}(t) \quad (2.128)$$

e

$$\dot{\bar{p}}(t) \equiv \frac{1}{3}tr \left[\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(t) \right], \quad (2.129)$$

$$\bar{p}(t) \equiv \frac{1}{3}tr [\bar{\boldsymbol{\tau}}(t)], \quad (2.130)$$

em que $\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^D(t)$ e $\dot{\bar{p}}(t)$ são respectivamente as partes deviatória e volumétrica da taxa da medida de tensão.

Denotando

$$e(t) = \frac{B(t)}{3}\bar{p}(0) + \int_0^t \frac{B(t-\xi)}{3}\dot{\bar{p}}(\xi)d\xi \quad (2.131)$$

e

$$\mathbf{E}^D(t) = \frac{J(t)}{2}\bar{\boldsymbol{\tau}}^D(0) + \int_0^t \frac{J(t-\xi)}{2}\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^D(\xi)d\xi, \quad (2.132)$$

o tensor deformação logarítmica pode ser decomposto como

$$\mathbf{E}(t) = e(t)\mathbf{I} + \mathbf{E}^D(t), \quad (2.133)$$

em que $e(t)$ denota a parte hidrostática do tensor deformação e $\mathbf{E}^D(t)$ sua parte deviatória, e são dadas por

$$e(t) = tr [\mathbf{E}(t)] \quad (2.134)$$

e

$$\mathbf{E}^D(t) = \mathbb{I}_{dev} \mathbf{E}(t). \quad (2.135)$$

Considera-se que os módulos $J(t)$ e $B(t)$ são representados por suas respectivas expansões em séries de Prony, i.e.,

$$J(t) = J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right); \quad (2.136)$$

$$B(t) = B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right). \quad (2.137)$$

Como resultado, a decomposição do tensor deformação logarítmica pode ser representada como

$$\mathbf{E}(t) = e(t) \mathbf{I} + \mathbf{E}^D(t), \quad (2.138)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^D(t) &= \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \bar{\boldsymbol{\tau}}^D(0) \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}^D(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.139)$$

e

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \bar{p}(0) \\ &+ \int_0^t \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \dot{\bar{p}}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Assim, relendo as equações 2.139 e 2.140, obtem-se

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \bar{p}(0) \\ &+ \int_0^t \frac{1}{3} \left[B_0 + \sum_{i=1}^{n_B} B_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right] \dot{\bar{p}}(\xi) d\xi; \\ &= \frac{B_0}{3} \bar{p}(t) + \sum_{i=1}^{n_B} \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^B} \right) \right) \bar{p}(0) \\ &+ \int_0^t \sum_{i=1}^{n_B} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right\} \dot{\bar{p}}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.141)$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^D(t) &= \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \bar{\tau}^D(0) \\
&\quad + \int_0^t \frac{1}{2} \left[J_0 + \sum_{i=1}^{n_j} J_i \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right] \dot{\bar{\tau}}^D(\xi) d\xi; \\
&= \frac{J_0}{2} \bar{\tau}^D(t) + \sum_{i=1}^{n_j} \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\
&\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^{n_j} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \dot{\bar{\tau}}^D(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.142}$$

Determinação da medida de deformação \mathbf{E}_{n+1}

Supondo uma discretização temporal, a medida logarítmica de deformação \mathbf{E} no instante t_{n+1} , pode ser representada como

$$\mathbf{E}_{n+1} = e_{n+1} \mathbf{I} + \mathbf{E}_{n+1}^D, \tag{2.143}$$

com $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}(t_{n+1})$. Deste modo pode-se partir para a determinação das partes deviatórica (\mathbf{E}_{n+1}^D) e volumétrica (e_{n+1}):

- Determinação da parte deviatórica da deformação:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^D(t) &= \frac{J_0}{2} \bar{\tau}^D(t) + \sum_{i=1}^{n_j} \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_j} \int_0^t \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.144}$$

Neste ponto define-se:

$$\mathbf{E}^D(t)^{(0)} := \frac{J_0}{2} \bar{\tau}^D(t) \tag{2.145}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^D(t)^{(i)} &:= \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\
&\quad + \int_0^t \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{2.146}$$

como consequência,

$$\mathbf{E}^D(t) = \mathbf{E}^D(t)^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_j} \mathbf{E}^D(t)^{(i)}. \tag{2.147}$$

Logo, no instante t_{n+1} ,

$$\mathbf{E}_{n+1}^D = \mathbf{E}_{n+1}^{D(0)} + \sum_{i=1}^{n_j} \mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} \tag{2.148}$$

em que

$$\mathbf{E}_{n+1}^{D(0)} = \frac{J_0}{2} \bar{\tau}^D(t_{n+1}); \quad (2.149)$$

$$= \frac{J_0}{2} \bar{\tau}_{n+1}^D. \quad (2.150)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} &= \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\ &+ \int_0^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_{n+1} - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Note por sua vez que $\mathbf{E}_{n+1}^{D(i)}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} &= \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\ &+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_{n+1} - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_{n+1} - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, tem-se neste momento

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t; \quad (2.153)$$

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}; \quad (2.154)$$

$$\bar{\tau}_{n+1}^D = \bar{\tau}_n^D + \Delta \bar{\tau}_n^D, \quad (2.155)$$

o que permite escrever:

• **Estratégia 1:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} &= \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\
&+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\
&= \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}^D(0) \\
&+ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^J} \right) \bar{\tau}^D(0) \\
&+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

deste modo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} &= \mathbf{E}_n^{D(i)} + \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^J} \right) \bar{\tau}^D(0) \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \\
&+ \left\{ \int_0^{t_n} \left[\frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right] \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&+ \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \right] \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right); \\
&\simeq \mathbf{E}_n^{D(i)} + \tilde{\mathbf{E}}_n^{D(i)} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) + \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^J} \right) \right) (\bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\tau}_n^D) \\
&+ \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^J} \right) (\bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\tau}_n^D) \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right); \text{ método de Euler} \\
&= \mathbf{E}_n^{D(i)} + \tilde{\mathbf{E}}_n^{D(i)} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) + \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^J} \right) \right) \Delta \bar{\tau}_n^D. \quad (2.156)
\end{aligned}$$

- **Estratégia 2:**

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} &= \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i^J} \right) \right) \bar{\tau}_0^D \\
&+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{J_i}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^J} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\
&= \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_0^D - \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^J} \right) \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \bar{\tau}_0^D + \int_0^{t_n} \frac{J_i}{2} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&- \left\{ \int_0^{t_n} \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \\
&+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{J_i}{2} \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi - \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right),
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{n+1}^{D(i)} &\simeq \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_0^D + \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_n^D - \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_0^D - \check{\mathbf{S}}_n^{(i)} \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) + \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_{n+1}^D - \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_n^D \\
&- \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^J} \right) (\bar{\tau}_{n+1}^D - \bar{\tau}_n^D) \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right); \text{ método de Euler} \\
&= \frac{J_i}{2} \bar{\tau}_{n+1}^D - \check{\mathbf{E}}_n^{D(i)} \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) - \frac{J_i}{2} \Delta \bar{\tau}_n^D \exp \left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^J} \right). \tag{2.157}
\end{aligned}$$

- Determinação de $\check{\mathbf{E}}_n^{D(i)}$:

$$\begin{aligned}
\check{\mathbf{E}}_n^{D(i)} &= \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^J} \right) \bar{\tau}_0^D + \int_0^{t_n} \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^J} \right) \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\
&= \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_{n-1}}{\tau_i^J} \right) \bar{\tau}_0^D \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \\
&+ \left[\int_0^{t_{n-1}} \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_{n-1} - \xi}{\tau_i^J} \right) \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right] \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) \\
&+ \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{J_i}{2} \exp \left(-\frac{t_{n-1} - \xi}{\tau_i^J} \right) \frac{\partial \bar{\tau}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right] \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right); \\
&= \check{\mathbf{E}}_{n-1}^{D(i)} \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^J} \right) + \frac{J_i}{2} \Delta \bar{\tau}_{n-1}^D \exp \left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^J} \right). \tag{2.158}
\end{aligned}$$

- Determinação da parte volumétrica da deformação:

$$\begin{aligned}
e(t) &= \frac{B_0}{3}\bar{p}(t) + \sum_{i=1}^{n_B} \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^B}\right)\right) \bar{p}(0) \\
&\quad + \int_0^t \sum_{i=1}^{n_B} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \dot{\bar{p}}(\xi) d\xi,
\end{aligned} \tag{2.159}$$

assim define-se:

$$e(t)^{(0)} = \frac{B_0}{3}\bar{p}(t) \tag{2.160}$$

e

$$\begin{aligned}
e(t)^{(i)} &= \sum_{i=1}^{n_B} \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^B}\right)\right) \bar{p}(0) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n_B} \int_0^t \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \dot{\bar{p}}(\xi) d\xi
\end{aligned} \tag{2.161}$$

como consequência,

$$e(t) = e(t)^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_B} e(t)^{(i)}. \tag{2.162}$$

Deste modo, no instante t_{n+1} ,

$$e_{n+1} = e_{n+1}^{(0)} + \sum_{i=1}^{n_B} e_{n+1}^{(i)} \tag{2.163}$$

em que

$$e_{n+1}^{(0)} = \frac{B_0}{3}\bar{p}_{n+1} \tag{2.164}$$

e

$$\begin{aligned}
e_{n+1}^{(i)} &= \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^B}\right)\right) \bar{p}_0 \\
&\quad + \int_0^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Note por sua vez que $e_{n+1}^{(i)}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned}
e_{n+1}^{(i)} &= \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^B}\right)\right) \bar{p}_0 \\
&\quad + \int_0^{t_n} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{2.166}$$

Definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, tem-se

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t; \quad (2.167)$$

$$t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\Delta t}{2}; \quad (2.168)$$

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n + \Delta \bar{p}_n, \quad (2.169)$$

o que permite escrever:

• **Estratégia 1:**

$$\begin{aligned} e_{n+1}^{(i)} &= \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i^B} \right) \right) \bar{p}_0 \\ &+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\ &= \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^B} \right) \right) \bar{p}_0 \\ &+ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B} \right) \right) \exp \left(-\frac{t_n}{\tau_i^B} \right) \bar{p}_0 \\ &+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &+ \int_0^{t_n} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B} \right) \right) \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B} \right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B} \right) \right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B} \right) \right) \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B} \right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi, \quad (2.170) \end{aligned}$$

e deste modo

$$\begin{aligned}
e_{n+1}^{(i)} &= e_n^{(i)} + \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_i^B}\right) \bar{p}_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right)\right) \\
&\quad + \left\{ \int_0^{t_n} \left[\frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B}\right) \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right)\right) \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&\quad + \left\{ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B}\right) \right] \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right)\right); \\
&\simeq e_n^{(i)} + \check{e}_n^{(i)} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right)\right) + \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^B}\right)\right) (\bar{p}_{n+1} - \bar{p}_n) \\
&\quad + \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^B}\right) (\bar{p}_{n+1} - \bar{p}_n) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right)\right); \\
&= e_n^{(i)} + \check{e}_n^{(i)} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right)\right) + \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^B}\right)\right) \Delta \bar{p}_n. \tag{2.171}
\end{aligned}$$

• **Estratégia 2:**

$$\begin{aligned}
e_{n+1}^{(i)} &= \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i^B}\right)\right) \bar{p}_0 \\
&\quad + \int_0^{t_n} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ \frac{B_i}{3} \left(1 - \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^B}\right)\right) \right\} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\
&= \frac{B_i}{3} \bar{p}_0 - \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_i^B}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right) \bar{p}_0 \\
&\quad + \int_0^{t_n} \frac{B_i}{3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi - \left[\int_0^{t_n} \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right] \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right) \\
&\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{B_i}{3} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi - \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right] \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right) \tag{2.172}
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
e_{n+1}^{(i)} &\simeq \frac{B_i}{3} \bar{p}_0 + \frac{B_i}{3} \bar{p}_n - \frac{B_i}{3} \bar{p}_0 - \check{e}_n^{(i)} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right) + \frac{B_i}{3} \bar{p}_{n+1} - \frac{B_i}{3} \bar{p}_n \\
&\quad - \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^B}\right) (\bar{p}_{n+1} - \bar{p}_n) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right); \\
&= \frac{B_i}{3} \bar{p}_{n+1} - \check{e}_n^{(i)} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right) - \frac{B_i}{3} (\Delta \bar{p}_n) \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^B}\right).
\end{aligned}$$

• Determinação de $\check{e}_n^{(i)}$

$$\begin{aligned}
\check{e}_n^{(i)} &= \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_i^B}\right) \bar{p}_0 + \int_0^{t_n} \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^B}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\
&= \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_{n-1} + \Delta t}{\tau_i^B}\right) \bar{p}_0 \\
&\quad + \int_0^{t_{n-1}} \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_{n-1} + \Delta t - \xi}{\tau_i^B}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\
&\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{B_i}{3} \exp\left(-\frac{t_{n-1} + \Delta t - \xi}{\tau_i^B}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\
&= \check{e}_{n-1}^{(i)} \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^B}\right) + \frac{B_i}{3} \Delta \bar{p}_{n-1} \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^B}\right).
\end{aligned} \tag{2.173}$$

2.4.4 Um Outro Modelo Viscoelástico Linear

Uma outra proposta para o modelo tridimensional é apresentada na configuração atual da forma seguinte:

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbb{D}_{ijkl}(t - t_0) \varepsilon_{kl}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\varepsilon}_{kl}(\xi) d\xi. \tag{2.174}$$

Novamente, considerando os campos suficientemente suaves, tem-se

$$\frac{d}{d\xi} \{ \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) \} = \dot{\mathbb{D}}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) + \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\varepsilon}_{kl}(\xi) \tag{2.175}$$

integrando em ξ de t_0 a t ,

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\xi} \{ \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) \} d\xi = \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{D}}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\varepsilon}_{kl}(\xi) d\xi. \tag{2.176}$$

Contudo

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^t \frac{d}{d\xi} \{ \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) \} d\xi &= \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) \Big|_{t_0}^t \\
&= \mathbb{D}_{ijkl}(0) \varepsilon_{kl}(t) - \mathbb{D}_{ijkl}(t - t_0) \varepsilon_{kl}(t_0)
\end{aligned} \tag{2.177}$$

o que permite escrever

$$\int_{t_0}^t \mathbb{D}_{ijkl}(t - \xi) \dot{\varepsilon}_{kl}(\xi) d\xi = - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{D}}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi + \mathbb{D}_{ijkl}(0) \varepsilon_{kl}(t) - \mathbb{D}_{ijkl}(t - t_0) \varepsilon_{kl}(t_0). \tag{2.178}$$

Substituindo 2.178 em 2.174, tem-se

$$\sigma_{ij}(t) = \mathbb{D}_{ijkl}(0) \varepsilon_{kl}(t) - \int_{t_0}^t \dot{\mathbb{D}}_{ijkl}(t - \xi) \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi. \tag{2.179}$$

Considerando um material isotrópico, temos

$$\mathbb{D}(t) = 2 G(t) \mathbb{I}_{dev} + K(t) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \tag{2.180}$$

em que

$$\mathbb{I}_{dev} = \left\{ \mathbb{I} - \frac{1}{3}(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right\}. \quad (2.181)$$

Voltando-se à equação constitutiva dada em 2.174

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbb{D}(t - t_0)\boldsymbol{\varepsilon}(t_0) + \int_{t_0}^t \mathbb{D}(t - \xi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi)d\xi, \quad (2.182)$$

substituindo 2.180 em 2.182 tem-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= [2G(t - t_0) \mathbb{I}_{dev} + K(t - t_0)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \boldsymbol{\varepsilon}(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t [2G(t - \xi) \mathbb{I}_{dev} + K(t - \xi)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\xi)d\xi. \end{aligned} \quad (2.183)$$

Lembrando que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev}\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (2.184)$$

e

$$e^V(t) \equiv \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon}(t) = tr [\boldsymbol{\varepsilon}(t)] \quad (2.185)$$

pode-se escrever

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= 2G(t - t_0)\boldsymbol{\varepsilon}^D(t_0) + K(t - t_0)e^V(t_0)\mathbf{I} \\ &+ \int_{t_0}^t \{2G(t - \xi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^D(\xi) + K(t - \xi)\dot{e}^V(\xi)\mathbf{I}\} d\xi. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Considerando que $t_0 = 0$, pode-se então denotar

$$p(t) = K(t)e^V(0) + \int_0^t K(t - \xi)\dot{e}^V(\xi)d\xi \quad (2.187)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}^D(t) = 2G(t)\boldsymbol{\varepsilon}^D(0) + \int_0^t 2G(t - \xi)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^D(\xi)d\xi. \quad (2.188)$$

Desta forma, o tensor tensão pode ser decomposto como

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = p(t)\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D(t) \quad (2.189)$$

em que $p(t)$ denota a parte hidrostática do tensor tensão e $\boldsymbol{\sigma}^D(t)$ sua parte deviatória, designados por

$$p(t) = \frac{1}{3}tr [\boldsymbol{\sigma}(t)] \quad (2.190)$$

e

$$\boldsymbol{\sigma}^D(t) = \mathbb{I}_{dev}\boldsymbol{\sigma}(t). \quad (2.191)$$

Assim, as funções núcleo das convoluções anteriores são apresentadas em termos das séries de

Prony da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G(t) &= G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right) \\ \text{e} \\ K(t) &= K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^K}\right) \end{aligned} \quad (2.192)$$

em que G_∞ e G_i são os módulos de cisalhamento elástico, K_∞ e K_i são os módulos elásticos e τ_i^G e τ_i^K são as relaxações temporais para as componentes da série de Prony.

Como resultado da decomposição do tensor tensão de Cauchy, tem-se

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = p(t) \mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D(t) \quad (2.193)$$

em que

$$\boldsymbol{\sigma}^D(t) = 2G(t)\boldsymbol{\varepsilon}^D(0) + \int_0^t \left\{ 2 \left[G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^G}\right) \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^D(\xi) \right\} d\xi \quad (2.194)$$

e

$$p(t) = K(t)e^V(0) + \int_0^t \left\{ \left[K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^K}\right) \right] \dot{e}^V(\xi) \right\} d\xi. \quad (2.195)$$

Analogamente ao que já havia sido feito em 2.90, pode-se definir

$$\begin{aligned} \alpha_i^G &= G_i/G_0 \\ \text{and} \\ \alpha_i^K &= K_i/K_0 \end{aligned} \quad (2.196)$$

em que

$$\begin{aligned} G_0 &= G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \\ \text{e} \\ K_0 &= K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Assim as funções núcleos podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G(t) &= G_0 \left[\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right) \right] \\ \text{e} \\ K(t) &= K_0 \left[\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^K}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.198)$$

Adicionalmente, os parâmetros G e K podem ser escritos em termos de outros parâmetros

materiais tais como o módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν , como segue:

$$\begin{aligned} E &= \frac{9 K G}{3 K + G}, \\ \nu &= \frac{3 K - 2 G}{6 K + 2 G}, \\ G &= \frac{E}{2(1 + \nu)}, \\ k &= K - \frac{2}{3}G, \end{aligned} \quad (2.199)$$

em que K é o módulo elástico e k é o módulo volumétrico.

2.4.5 Modelo Viscoelástico Finito

Suponha, novamente, um par conjugado de medidas tensão e de deformação Σ e γ respectivamente. Objetivando generalizar a equação constitutiva anterior para problemas de deformação finita define-se a transformação "barra" (2.93-2.96), como segue:

$$\bar{\Sigma}(t) = \Theta(t)^T \Sigma(t) \Theta(t). \quad (2.200)$$

Nestes termos tem-se

$$\bar{\Sigma}(t) = \bar{\mathbb{D}}(t)\bar{\epsilon}(0) + \int_0^t \bar{\mathbb{D}}(t - \xi) \dot{\bar{\gamma}}(\xi) d\xi. \quad (2.201)$$

Sob a hipótese de isotropia do material, tem-se

$$\bar{\mathbb{D}}(t) = \mathbb{D}(t) = 2 G(t) \mathbb{I}_{dev} + K(t) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad (2.202)$$

e pode-se mostrar ainda que

$$\dot{\bar{\tau}}(t) = \Theta(t)^T \overset{\square}{\tau}(t) \Theta(t) \quad (2.203)$$

na qual $\overset{\square}{\tau}$ denota a taxa de Green-Naghdi do tensor tensão de Kirchhoff, que é dado por

$$\begin{aligned} \overset{\square}{\tau} &= \mathbf{R} \left\{ \frac{d}{dt} (\mathbf{R}^T \tau \mathbf{R}) \right\} \mathbf{R}^T; \\ &= \dot{\tau} - \Xi \tau + \tau \Xi \end{aligned} \quad (2.204)$$

sendo que $\Xi(t) = \dot{\mathbf{R}}(t) \mathbf{R}^T(t)$ e $\Theta(t) = \mathbf{R}(t)$.

Corolário 11 $\dot{\bar{\tau}}(t) = \Theta(t)^T \overset{\square}{\tau}(t) \Theta(t)$.

Dem. A definição de $\bar{\tau}(t) = \Theta(t)^T \tau(t) \Theta(t)$ permite a diferenciação em relação ao tempo. Supondo os tensores suaves em relação ao tempo, temos

$$\dot{\bar{\tau}}(t) = \dot{\Theta}(t)^T \tau(t) \Theta(t) + \Theta(t)^T \dot{\tau}(t) \Theta(t) + \Theta(t)^T \tau(t) \dot{\Theta}(t). \quad (2.205)$$

Porém

$$\dot{\Theta}(t) = \Xi(t) \Theta(t). \quad (2.206)$$

Sabendo que $\Theta(t) = \mathbf{R}(t)$ e $\Xi^T = -\Xi$ (antisimetria), tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}(t)^T &= \Theta(t)^T \Xi(t)^T; \\ &= -\Theta(t)^T \Xi(t)\end{aligned}\quad (2.207)$$

substituindo 2.206 e 2.207 em 2.205 pode-se escrever

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\tau}}(t) &= -\Theta(t)^T \Xi(t) \tau(t) \Theta(t) + \Theta(t)^T \dot{\tau}(t) \Theta(t) + \Theta(t)^T \tau(t) \Xi(t) \Theta(t); \\ &= \Theta(t)^T \{-\Xi(t) \tau(t) + \dot{\tau}(t) + \tau(t) \Xi(t)\} \Theta(t); \\ &= \Theta(t)^T \overset{\square}{\tau}(t) \Theta(t).\end{aligned}\quad (2.208)$$

■

Substituindo a equação 2.202 em 2.201 obtem-se

$$\bar{\Sigma}(t) = [2G(t)\mathbb{I}_{dev} + K(t)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \bar{\gamma}(0) + \int_0^t [2G(t-\xi)\mathbb{I}_{dev} + K(t-\xi)(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})] \dot{\bar{\gamma}}(\xi) d\xi. \quad (2.209)$$

Definindo

$$\dot{\bar{\gamma}}^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev} \dot{\bar{\gamma}}(t) \quad \text{parte deviatórica da taxa da medida de deformação} \quad (2.210)$$

e

$$\dot{\bar{\gamma}}^H(t) \equiv \mathbf{I} : \dot{\bar{\gamma}}(t) = tr \left[\dot{\bar{\gamma}}(t) \right] \quad \text{parte volumétrica da taxa da medida de deformação} \quad (2.211)$$

pode-se escrever

$$\bar{\Sigma}(t) = 2G(t)\bar{\gamma}^D(0) + K(t)\bar{\gamma}^H(0)\mathbf{I} + \int_0^t \left\{ 2G(t-\xi)\dot{\bar{\gamma}}^D(\xi) + K(t-\xi)\dot{\bar{\gamma}}^H(\xi)\mathbf{I} \right\} d\xi. \quad (2.212)$$

Denotando

$$\bar{p}^*(t) = K(t)\bar{\gamma}^H(0) + \int_0^t K(t-\xi)\dot{\bar{\gamma}}^H(\xi) d\xi \quad (2.213)$$

e

$$\bar{\Sigma}^D(t) = 2G(t)\bar{\gamma}^D(0) + \int_0^t 2G(t-\xi)\dot{\bar{\gamma}}^D(\xi) d\xi, \quad (2.214)$$

pode-se decompor o tensor tensão como

$$\bar{\Sigma}(t) = \bar{p}^*(t)\mathbf{I} + \bar{\Sigma}^D(t) \quad (2.215)$$

em que $\bar{p}^*(t)$ denota a parte hidrostática do tensor tensão e $\bar{\Sigma}^D(t)$ sua parte deviatórica, i.e.

$$\bar{p}^*(t) = \frac{1}{3} tr [\bar{\Sigma}(t)] \quad (2.216)$$

e

$$\bar{\Sigma}^D(t) = \mathbb{I}_{dev} \bar{\Sigma}(t). \quad (2.217)$$

Lembrando-se que:

$$G(t) = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right); \quad (2.218)$$

$$K(t) = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^K}\right) \quad (2.219)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}^D(t) &= 2 \left[G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right) \right] \bar{\gamma}^D(0) \\ &+ \int_0^t \left\{ 2 \left[G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^G}\right) \right] \dot{\bar{\gamma}}^D(\xi) \right\} d\xi \end{aligned} \quad (2.220)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}^*(t) &= \left[K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^K}\right) \right] \bar{\gamma}^H(0) \\ &+ \int_0^t \left\{ \left[K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^K}\right) \right] \dot{\bar{\gamma}}^H(\xi) \right\} d\xi. \end{aligned} \quad (2.221)$$

2.4.6 Um Modelo Particular para Viscoelasticidade Finita

Objetivando definir uma equação constitutiva para problemas de deformação finita, faz-se necessário modificar a medida de tensão arbitrária $\Sigma(t)$ por alguma medida de tensão particular, assim como a taxa de deformação arbitrária associada $\dot{\bar{\gamma}}$ por uma taxa de deformação particular, a qual forma o par conjugado desta medida de tensão. Lembrando-se então da medida de tensão rotacionada de Kirchhoff $\bar{\tau}$ e de seu par conjugado \mathbf{E} (2.50), representando a medida de deformação logarítmica (ver [36]), definida na configuração de referência Ω_o , tem-se

$$\bar{\tau} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}, \quad (2.222)$$

com

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.223)$$

e

$$\mathbf{E} = \ln(\mathbf{U}), \quad (2.224)$$

em que

$$\bar{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{E}}. \quad (2.225)$$

Desta forma, a equação constitutiva pode ser escrita como

$$\bar{\tau}(t) = \bar{\mathbb{D}}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \bar{\mathbb{D}}(t-\xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi. \quad (2.226)$$

considerando que o material seja isotrópico, tem-se $\bar{\mathbb{D}} = \mathbb{D}$, o que resulta em

$$\bar{\tau}(t) = \mathbb{D}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t-\xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi. \quad (2.227)$$

Assim,

$$\bar{\tau}(t) = 2G(t)\mathbf{E}^D(0) + K(t)e(0)\mathbf{I} + \int_0^t \left\{ 2G(t-\xi)\dot{\mathbf{E}}^D(\xi) + K(t-\xi)\dot{e}(\xi)\mathbf{I} \right\} d\xi, \quad (2.228)$$

sendo

$$\dot{\mathbf{E}}^D(t) \equiv \mathbb{I}_{dev}\dot{\mathbf{E}}(t), \quad (2.229)$$

e

$$\dot{e}(t) \equiv \mathbf{I} : \dot{\mathbf{E}}(t) = tr \left[\dot{\mathbf{E}}(t) \right], \quad (2.230)$$

em que $\dot{\mathbf{E}}^D(t)$ e $\dot{e}(t)$ são respectivamente a parte deviatórica e volumétrica da taxa de deformação logarítmica Lagrangeana.

Denotando

$$\bar{p}(t) = K(t)e(0) + \int_0^t K(t-\xi)\dot{e}(\xi)d\xi \quad (2.231)$$

e

$$\bar{\tau}^D(t) = 2G(t)\mathbf{E}^D(0) + \int_0^t 2G(t-\xi)\dot{\mathbf{E}}^D(\xi)d\xi, \quad (2.232)$$

pode-se decompor o tensor tensão como

$$\bar{\tau}(t) = \bar{p}(t)\mathbf{I} + \bar{\tau}^D(t), \quad (2.233)$$

na qual $\bar{p}(t)$ denota a parte hidrostática do tensor tensão rotacionado de Kirchhoff e $\bar{\tau}^D(t)$ sua parte deviatórica, i.e.,

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{3}tr [\bar{\tau}(t)] \quad (2.234)$$

e

$$\bar{\tau}^D(t) = \mathbb{I}_{dev}\bar{\tau}(t). \quad (2.235)$$

Relembrando-se das séries de Prony (2.218 e 2.219), tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^D(t) &= 2 \left[G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^G} \right) \right] \mathbf{E}^D(0) \\ &\quad + \int_0^t \left\{ 2 \left[G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i \exp \left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^G} \right) \right] \dot{\mathbf{E}}^D(\xi) \right\} d\xi \end{aligned} \quad (2.236)$$

e

$$\begin{aligned}\bar{p}(t) &= \left[K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^K}\right) \right] e(0) \\ &+ \int_0^t \left\{ \left[K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^K}\right) \right] \dot{e}(\xi) \right\} d\xi.\end{aligned}\quad (2.237)$$

Supondo agora uma discretização temporal, a medida de tensão rotacionada de Kirchhoff $\bar{\tau}$ no instante t_{n+1} , pode ser expressa como

$$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{p}_{n+1} \mathbf{I} + \bar{\tau}_{n+1}^D, \quad (2.238)$$

com $\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}(t_{n+1})$. Deste modo, pode-se partir para a determinação das partes deviatórica ($\bar{\tau}_{n+1}^D$) e volumétrica (\bar{p}_{n+1}):

- Determinação da parte deviatórica da tensão:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}^D(t) &= 2G_\infty \mathbf{E}^D(0) + \left[\sum_{i=1}^{n_G} 2G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right) \right] \mathbf{E}^D(0) + 2G_\infty \mathbf{E}^D(t) - 2G_\infty \mathbf{E}^D(0) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_G} \int_0^t \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi;\end{aligned}\quad (2.239)$$

$$\begin{aligned}&= 2G_\infty \mathbf{E}^D(t) + \sum_{i=1}^{n_G} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) \right. \\ &\left. + \int_0^t 2G_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^G}\right) \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\}.\end{aligned}\quad (2.240)$$

Neste ponto, definimos:

$$\bar{\tau}^D(t)^{(\infty)} := 2G_\infty \mathbf{E}^D(t) \quad (2.241)$$

e

$$\bar{\tau}^D(t)^{(i)} = 2G_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) + \int_0^t \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \quad (2.242)$$

Como consequência,

$$\bar{\tau}^D(t) = \bar{\tau}^D(t)^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{n_G} \bar{\tau}^D(t)^{(i)}. \quad (2.243)$$

Deste modo, no instante t_{n+1} ,

$$\bar{\tau}_{n+1}^D = \bar{\tau}_{n+1}^{D(\infty)} + \sum_{i=1}^{n_G} \bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} \quad (2.244)$$

na qual

$$\bar{\tau}_{n+1}^{D(\infty)} = 2G_\infty \mathbf{E}_{n+1}^D \quad (2.245)$$

e

$$\bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} = 2G_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) + \int_0^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \quad (2.246)$$

Note por sua vez que $\bar{\tau}_{n+1}^{D(i)}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} &= 2G_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) \\ &\quad + \int_0^{t_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.247)$$

Definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, com o passo fixo de tempo, tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} &= 2G_i \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) + \int_0^{t_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\ &= 2G_i \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_i^G}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) \\ &\quad + \int_0^{t_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^G}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^G}\right) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.248)$$

Como resultado

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) 2G_i \exp\left(-\frac{t_n}{\tau_i^G}\right) \mathbf{E}^D(0) \\ &\quad + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \int_0^{t_n} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.249)$$

i.e.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \bar{\tau}_n^{D(i)} \\ &\quad + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G}\right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp\left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^G}\right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.250)$$

A determinação da integral em 2.250 pode ser feita aproximadamente pela aplicação da

regra do ponto médio. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ 2G_i \exp \left(-\frac{t_n - \xi}{\tau_i^G} \right) \right\} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi &\simeq 2G_i \exp \left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G} \right) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\partial \mathbf{E}^D}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &= 2G_i \exp \left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G} \right) \Delta \mathbf{E}_n^D. \end{aligned} \quad (2.251)$$

em que

$$\Delta \mathbf{E}_n^D = \mathbf{E}_{n+1}^D - \mathbf{E}_n^D. \quad (2.252)$$

A aproximação da última integral é feita pelo método de Euler (implícito), então

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{n+1}^{D(i)} &= \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G} \right) \bar{\tau}_n^{D(i)} + \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G} \right) 2G_i \exp \left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^G} \right) \Delta \mathbf{E}_n^D; \\ &= \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^G} \right) \bar{\tau}_n^{D(i)} + 2G_i \exp \left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^G} \right) \Delta \mathbf{E}_n^D. \end{aligned} \quad (2.253)$$

- Determinação da parte hidrostática da tensão:

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) &= \left[K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^K} \right) \right] e(0) + K_\infty e(t) - K_\infty e(0) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_K} \int_0^t \left\{ K_i \exp \left(-\frac{t - \xi}{\tau_i^K} \right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\ &= K_\infty e(t) + \sum_{i=1}^{n_K} \left\{ K_i \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^K} \right) e(0) + \int_0^t K_i \exp \left(-\frac{t - \xi}{\tau_i^K} \right) \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (2.254)$$

Neste ponto, define-se:

$$\bar{p}(t)^{(\infty)} := K_\infty e(t) \quad (2.255)$$

e

$$\bar{p}(t)^{(i)} = K_i \exp \left(-\frac{t}{\tau_i^K} \right) e(0) + \int_0^t \left\{ K_i \exp \left(-\frac{t - \xi}{\tau_i^K} \right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \quad (2.256)$$

Como consequência,

$$\bar{p}(t) = \bar{p}(t)^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{n_K} \bar{p}(t)^{(i)}. \quad (2.257)$$

Deste modo, no instante t_{n+1} ,

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_{n+1}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{n_K} \bar{p}_{n+1}^{(i)} \quad (2.258)$$

na qual

$$\bar{p}_{n+1}^{(\infty)} = K_\infty e_{n+1} \quad (2.259)$$

e

$$\bar{p}_{n+1}^{(i)} = K_i \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^K} \right) e(0) + \int_0^{t_{n+1}} \left\{ K_i \exp \left(-\frac{t_{n+1} - \xi}{\tau_i^K} \right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \quad (2.260)$$

Note por sua vez que $\bar{p}_{n+1}^{(i)}$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n+1}^{(i)} &= K_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}}{\tau_i^K}\right) e(0) + \int_0^{t_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{t_{n+1}-\xi}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.261)$$

Definindo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, com o passo fixo de tempo, tem-se

$$\begin{aligned} \bar{p}_{n+1}^{(i)} &= K_i \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t}{\tau_i^K}\right) e(0) + \int_0^{t_n} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\{ K_i \exp\left(-\frac{t_n + \Delta t - \xi}{\tau_i^K}\right) \right\} \frac{\partial e}{\partial \xi}(\xi) d\xi; \\ &\simeq \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^K}\right) \bar{p}_n^{(i)} + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^K}\right) K_i \exp\left(-\frac{t_n - t_{n+\frac{1}{2}}}{\tau_i^K}\right) \Delta e_n; \\ &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau_i^K}\right) \bar{p}_n^{(i)} + K_i \exp\left(-\frac{\Delta t}{2\tau_i^K}\right) \Delta e_n \end{aligned} \quad (2.262)$$

em que

$$\Delta e_n = e_{n+1} - e_n. \quad (2.263)$$

2.5 Discretização Espacial do Problema

Voltando ao problema 2.33, tem-se

$$\begin{aligned} &\text{Determine } \mathbf{u}_{n+1} \in \text{Kin}_u(\Omega_o) \text{ tal que} \\ &F(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_u(\Omega_o), \end{aligned} \quad (2.264)$$

em que

$$F(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o.$$

Para resolver este problema não linear usa-se o método de Newton, como já comentado anteriormente.

O valor inicial da iteração para o instante atual é o valor convergido do instante anterior
$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n$, para $k = 0$.
Este valor é atualizado da seguinte forma
$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$.
O valor de $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ é encontrado resolvendo a equação
$\int_{\Omega_o} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^k) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = -F(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}).$

2.5.1 Discretização de Elementos Finitos via Galerkin

Objetivando aplicar o método de elementos finitos, é feita uma partição do domínio $\Omega_o \Rightarrow \Omega_o^h$, em elementos finitos Ω_{oe} e como resultado tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o &\simeq \int_{\Omega_o^h} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_o^h \\ &= \sum_e \int_{\Omega_{oe}} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_{oe}; \end{aligned} \quad (2.265)$$

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o \simeq \int_{\Omega_o^h} \rho_o^h \mathbf{b}^h \cdot \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_o^h = \sum_e \int_{\Omega_{oe}} \rho_o^h \mathbf{b}^h \cdot \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_{oe}; \quad (2.266)$$

$$\int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o \simeq \int_{\partial\Omega_o^h \cap \Gamma_o^t} \mathbf{t}_o^h \cdot \hat{\mathbf{v}}^h dA_o^h = \sum_e \int_{\partial\Omega_{oe} \cap \Gamma_{oe}^t} \mathbf{t}_o^h \cdot \hat{\mathbf{v}}^h dA_{oe}^h; \quad (2.267)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_o} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o &\simeq \int_{\Omega_o^h} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^h) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_o^h; \\ &= \sum_e \int_{\Omega_{oe}} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^h) \nabla (\Delta \mathbf{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_{oe}. \end{aligned} \quad (2.268)$$

Assim, faz-se uma interpolação dos campos $\mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t)$ e $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o)$ no interior de cada elemento finito Ω_{oe} , da seguinte forma

$$\mathbf{u}_{n+1}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t_{n+1}) \simeq \mathbf{u}_{n+1}^h(\mathbf{x}_o) = [\mathbf{N}(\mathbf{x}_o)] \mathbf{q}_{n+1}^e \quad (2.269)$$

$$\text{e} \quad (2.270)$$

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x}_o) \simeq \hat{\mathbf{v}}^h(\mathbf{x}_o) = [\mathbf{N}(\mathbf{x}_o)] \hat{\mathbf{q}}^e$$

em que

$$(\mathbf{q}_{n+1}^e)^T = \{u_1, v_1, w_1, \dots, u_s, v_s, w_s\}$$

representa o vetor de deslocamentos nodais do elemento, s o número de nós do elemento e $\{u_i, v_i, w_i, i = 1..s\}$ as componentes nodais do campo de deslocamento. $[\mathbf{N}(\mathbf{x}_o)]$ é a matriz de funções de interpolação construídas pelo MEF, que relaciona as componentes do vetor deslocamento com o vetor dos deslocamentos nodais do elemento.

O gradiente de \mathbf{u} , dada a sua discretização espacial, é escrito como

$$\nabla \mathbf{u}^h = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^s \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} u_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} u_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} u_i \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} v_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} v_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} v_i \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} w_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} w_i & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} w_i \end{bmatrix}. \quad (2.271)$$

Entretanto, a implementação de tal procedimento é inadequada. Deste modo, é proposto um mapeamento entre a forma matricial de $\nabla \mathbf{u}^h$ e uma forma vetorial conveniente. Este mapeamento

é tal que

$$\begin{bmatrix} (\nabla \mathbf{u}^h)_{11} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{12} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{13} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{21} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{22} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{23} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{31} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{32} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{33} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^s \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}. \quad (2.272)$$

Denotando agora

$$\mathbf{G}_i^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial x} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial y} & \frac{\partial N(\mathbf{x}_o)_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

definindo

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1 | \mathbf{G}_2 | \cdots | \mathbf{G}_s].$$

Tem-se

$$\nabla \mathbf{u}_{n+1}^h = \mathbf{G} \mathbf{q}_{n+1}^e \quad (2.273)$$

$$\text{e} \quad (2.274)$$

$$\nabla \hat{\mathbf{v}}^h = \mathbf{G} \hat{\mathbf{q}}^e \quad (2.275)$$

Analogamente pode-se escrever o vetor referente ao primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff, como

$$\vec{P}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.276)$$

Aplicando-se as definições acima na equação 2.265 tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_{o_e} &= \int_{\Omega_{o_e}} \vec{P}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \cdot \mathbf{G} \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega_{o_e}; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \vec{P}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \cdot \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega_{o_e}; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \vec{P}(\mathbf{q}_{n+1}^e) d\Omega_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \end{aligned}$$

da qual pode-se definir

$$\mathbf{F}_e^{int} = \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \vec{P}(\mathbf{q}_{n+1}^e) d\Omega_{o_e}.$$

A equação 2.266, correspondente ao termo de força de corpo, pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o \mathbf{b}^h \cdot \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_{o_e} &= \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o^h \vec{b} \cdot \mathbf{N} \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega_{o_e}; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o^h \mathbf{N}^T \vec{b} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega_{o_e}; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o^h \mathbf{N}^T \vec{b} d\Omega_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \end{aligned}$$

na qual \vec{b} é o vetor correspondente à força de corpo \mathbf{b}^h e assim definir

$$\mathbf{F}_e^b = \int_{\Omega_{o_e}} \rho_o^h \mathbf{N}^T \vec{b} d\Omega_{o_e}.$$

O termo de carga, equação 2.267, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_{o_e}^t} \mathbf{t}_o^h \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_{o_e} &= \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_{o_e}^t} \vec{t} \cdot \mathbf{N} \hat{\mathbf{q}}^e dA_{o_e}; \\ &= \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_{o_e}^t} \mathbf{N}^T \vec{t} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e dA_{o_e}; \\ &= \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_{o_e}^t} \mathbf{N}^T \vec{t} dA_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e, \end{aligned}$$

em que \vec{t} corresponde à forma vetorial da tração \mathbf{t}_o^h e então pode-se definir

$$\mathbf{F}_e^{\vec{t}} = \int_{\partial\Omega_{o_e} \cap \Gamma_{o_e}^t} \mathbf{N}^T \vec{t} dA_{o_e}.$$

Fazendo o mesmo com a equação 2.268, em que o tensor de quarta ordem \mathbb{A} será mapeado para um tensor de segunda ordem \mathbf{A} , tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{o_e}} \mathbb{A}(\mathbf{u}_{n+1}^h) \nabla(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^h) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}^h d\Omega_{o_e} &= \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \mathbf{G} \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega_{o_e}; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e d\Omega_{o_e}; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^e d\Omega_{o_e} \cdot \hat{\mathbf{q}}^e; \\ &= \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} d\Omega_{o_e} \Delta \mathbf{q}_{n+1}^e \cdot \hat{\mathbf{q}}^e. \end{aligned}$$

Desta última equação pode-se definir

$$\mathbf{K}_T^e := \int_{\Omega_{o_e}} \mathbf{G}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}_{n+1}^e) \mathbf{G} d\Omega_{o_e}.$$

2.5.2 Montagem do Problema Global

Introduzindo os operadores de montagem $U_e(\cdot)$, $A_e(\cdot)$ e $\check{A}_e(\cdot)$ associados à obtenção das matrizes e vetores globais, pela adição da contribuição de cada elemento finito, pode-se definir as seguintes matrizes e vetores globais:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}\} &= U_e \{\mathbf{q}_{n+1}^e\} \quad \text{e} \quad \{\hat{\mathbf{U}}\} = U_e \{\hat{\mathbf{q}}^e\} \\ \{\mathbf{F}^{int}\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{int}\} \quad \text{e} \quad [\mathbf{K}_T] = A_e [\mathbf{K}_T^e] \\ \{\mathbf{F}^b\} &= \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^b\} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{F}^{\bar{t}}\} = \check{A}_e \{\mathbf{F}_e^{\bar{t}}\}, \end{aligned} \quad (2.277)$$

o que possibilita o rearranjo da discretização global das equações de equilíbrio:

$$[\mathbf{F}^{int}] \cdot \hat{\mathbf{U}} - \{\mathbf{F}^b\} \cdot \hat{\mathbf{U}} - \{\mathbf{F}^{\bar{t}}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad \forall \hat{\mathbf{U}}.$$

Assim do método de Newton temos:

$$[\mathbf{K}_T] \Delta \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} \cdot \hat{\mathbf{U}} = -\{\tilde{\mathbf{R}}\} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad \forall \hat{\mathbf{U}}$$

em que

$$\{\tilde{\mathbf{R}}\} = \{\mathbf{F}^{int}\} - \{\mathbf{F}^{ext}\}$$

com

$$\{\mathbf{F}^{ext}\} = \{\mathbf{F}^b\} + \{\mathbf{F}^{\bar{t}}\}.$$

O problema discretizado global pode então ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{Determine } \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} \in \text{Kin}_{u^h}(\Omega_o^h) \text{ tal que} \\ &\{\mathbf{F}^{int}\} - \{\mathbf{F}^{ext}\} = \mathbf{0}, \quad \forall \quad \hat{\mathbf{U}} \in \text{Var}_{u^h}(\Omega_o^h). \end{aligned}$$

Assim, pelo método de Newton temos

O valor inicial usado é
$\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \tilde{\mathbf{U}}_n$, para $k = 0$.
Este valor é atualizado da forma seguinte
$\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^{k+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \Delta \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k$.
O valor de $\Delta \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k$ é encontrado resolvendo a equação
$[\mathbf{K}_T] \Delta \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k = -\{\tilde{\mathbf{R}}\}.$

2.6 Modelo Axisimétrico

O desenvolvimento do modelo axisimétrico faz uso do sistema de coordenadas cilíndricas. É suposto que as propriedades materiais, o carregamento e as condições de contorno sejam independentes do ângulo de rotação θ_o . O tensor gradiente de deformação é escrito com relação ao

sistema cartesiano como

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}; \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_{o1}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{o2}} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{o3}} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_{o1}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{o2}} & \frac{\partial u_2}{\partial x_{o3}} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_{o1}} & \frac{\partial u_3}{\partial x_{o2}} & \frac{\partial u_3}{\partial x_{o3}} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Com a identificação do sistema de coordenadas cilíndricas pode-se escrever

$$\begin{aligned}u_1 &\leftrightarrow u_r & u_2 &\leftrightarrow u_z & u_3 &\leftrightarrow u_\theta \\ x_{o1} &\leftrightarrow r_o & x_{o2} &\leftrightarrow z_o & x_{o3} &\leftrightarrow \theta_o,\end{aligned}$$

lembrando que o gradiente de \mathbf{u} em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r_o} & \frac{\partial u_r}{\partial z_o} & \frac{1}{r_o} \frac{\partial u_r}{\partial \theta_o} - \frac{u_\theta}{r_o} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r_o} & \frac{\partial u_z}{\partial z_o} & \frac{1}{r_o} \frac{\partial u_z}{\partial \theta_o} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r_o} & \frac{\partial u_\theta}{\partial z_o} & \frac{1}{r_o} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta_o} + \frac{u_r}{r_o} \end{bmatrix}. \quad (2.278)$$

A hipótese levada em consideração com o modelo axissimétrico é que os campos de deslocamento, de deformação e de tensão são completamente independentes do ângulo θ_o . Assim, o campo de deslocamento é

$$u_r = u_r(r_o, z_o) = u_r(\mathbf{r}_o) \quad u_z = u_z(r_o, z_o) = u_z(\mathbf{r}_o) \quad u_\theta = 0 \quad (2.279)$$

o que implica em

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r_o} & \frac{\partial u_r}{\partial z_o} & 0 \\ \frac{\partial u_z}{\partial r_o} & \frac{\partial u_z}{\partial z_o} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u_r}{r_o} \end{bmatrix} \simeq \nabla \mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial r_o} u_{rI} & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial z_o} u_{rI} & 0 \\ \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial r_o} u_{zI} & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial z_o} u_{zI} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_o} N(\mathbf{r}_o)_I u_{rI} \end{bmatrix} \quad (2.280)$$

em que neste caso $[\mathbf{N}(\mathbf{r}_o)]$ é a matriz, de funções de interpolação construídas pelo MEF, que relaciona as componentes do vetor deslocamento com o vetor dos deslocamentos nodais do elemento. Entretanto, a implementação de tal procedimento é inadequado e desta forma, é proposto um mapeamento entre a forma matricial de $\nabla \mathbf{u}^h$ e uma forma vetorial conveniente na qual apenas as componentes não nulas são levadas em consideração. Este mapeamento é tal que

$$\tilde{G}_u^h = \begin{bmatrix} (\nabla \mathbf{u}^h)_{11} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{12} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{21} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{22} \\ (\nabla \mathbf{u}^h)_{33} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial r_o} & 0 \\ \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial z_o} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial r_o} \\ 0 & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial z_o} \\ \frac{1}{r_o} N(\mathbf{r}_o)_I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{rI} \\ u_{zI} \end{bmatrix}. \quad (2.281)$$

Denotando agora

$$\tilde{G}_I^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial r_o} & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial z_o} & 0 & 0 & \frac{1}{r_o} N(\mathbf{r}_o)_I \\ 0 & 0 & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial r_o} & \frac{\partial N(\mathbf{r}_o)_I}{\partial z_o} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\vec{I}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

é possível escrever o vetor gradiente de deformação como

$$\vec{F}^h = \vec{I} + \vec{G}_u^h$$

com

$$\tilde{\mathbf{G}} = \sum_{I=1}^n \tilde{G}_I \mathbf{u}_I^h, \text{ sendo } \mathbf{u}_I^h = \begin{bmatrix} u_{r_I} \\ u_{z_I} \end{bmatrix}.$$

ou

$$\tilde{\mathbf{G}} = \left[\tilde{G}_1 \mid \tilde{G}_2 \mid \cdots \mid \tilde{G}_n \right],$$

assim

$$\nabla \mathbf{u}_{n+1}^h = \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{q}_{n+1}^e, \text{ sendo } (\mathbf{q}_{n+1}^e)^T = \{u_{r_1}, u_{z_1}, \dots, u_{r_n}, u_{z_n}\}.$$

Analogamente, pode-se escrever o vetor referente ao primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff como

$$\vec{P}^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{21} & P_{22} & P_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.282)$$

2.7 Procedimento Numérico Global

A cada ponto de integração da forma fraca discretizada, os cálculos realizados para determinação do campo de deslocamento e consequentemente do campo de tensões são descritos nas tabelas de procedimentos (tabelas 2.1 e 2.2). A equação constitutiva permite então o cálculo de $\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}$ ($\bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} = \bar{p}_{n+1} \mathbf{I} + \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1}^D$), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{n+1} &= \mathbf{R}_{n+1} \bar{\boldsymbol{\tau}}_{n+1} (\mathbf{R}_{n+1})^T; \\ \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau}_{n+1}; \end{aligned} \quad (2.283)$$

com

$$\begin{aligned} J &= \det(\mathbf{F}_{n+1}); \\ \mathbf{P}_{n+1} &= J \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{-T}; \\ &= J \frac{\boldsymbol{\tau}_{n+1}}{J} \mathbf{F}_{n+1}^{-T}; \\ &= \boldsymbol{\tau}_{n+1} \mathbf{F}_{n+1}^{-T}. \end{aligned} \quad (2.284)$$

Assim tem-se o algoritmo global do método de Newton (tabela 2.1):

Tabela 2.1: Método de Newton para o problema global

<p>(i) Inicie o contador: $k \leftarrow 0$</p> <p>(ii) Inicialize $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \tilde{\mathbf{U}}_n$</p> <p>(iii) Calcule as informações da tabela 2.2</p> <p>(iv) Calcule o resíduo $\tilde{\mathbf{R}}^0 = \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^0)$ por $\tilde{\mathbf{R}}^0 = \mathbf{F}^{int}(\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^0) - \mathbf{F}_{n+1}^{ext}$ e o erro por $erro = \ \tilde{\mathbf{R}}^0\$</p> <p>(v) Faça enquanto ($\ \tilde{\mathbf{R}}^k\ > tol$ ou $k < k_{max}$)</p> <p style="padding-left: 40px;">(1) Monte a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_T(\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k)$</p> <p style="padding-left: 40px;">(2) Resolva o sistema de equações para $\Delta\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k$ $\Delta\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k = -\mathbf{K}_T^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^k$</p> <p style="padding-left: 40px;">(3) Atualize os deslocamentos $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^{k+1}$ $\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^{k+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \Delta\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}^k$</p> <p style="padding-left: 40px;">(4) Calcule os novos valores da tabela 2.2</p> <p style="padding-left: 40px;">(5) Calcule $\tilde{\mathbf{R}}^{k+1}$ e então $erro = \ \tilde{\mathbf{R}}^{k+1}\$</p> <p style="padding-left: 40px;">(6) Atualize $\tilde{\mathbf{R}}^k \leftarrow \tilde{\mathbf{R}}^{k+1}$ e $k \leftarrow k + 1$</p> <p>fim</p>

Tabela 2.2: Cômputos requeridos em cada ponto

<p>(i) Dado \mathbf{u}_{n+1} calcule:</p> $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}_{n+1}.$ <p>(iii) Determine \mathbf{C}_{n+1} $\mathbf{C}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1}.$ <p>(iv) Realize a decomposição espectral de \mathbf{C}_{n+1} $\mathbf{C}_{n+1} = \sum \lambda_i (\vec{l}_i \otimes \vec{l}_i).$ <p>(v) Calcule \mathbf{U}_{n+1} $\mathbf{U}_{n+1} = (\mathbf{C}_{n+1})^{\frac{1}{2}} = \sum \lambda_i^{\frac{1}{2}} (\vec{l}_i \otimes \vec{l}_i).$ <p>(vi) Calcule as deformações logarítmicas $\mathbf{E}_{n+1} = \ln(\mathbf{U}_{n+1}).$ <p>(vii) Calcule o tensor inverso $(\mathbf{U}_{n+1})^{-1}$.</p> <p>(viii) Calcule $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}(\mathbf{U}_{n+1})^{-1}.$ </p> </p></p></p></p>

2.8 Exemplos Numéricos

Este tópico faz referência a alguns casos numéricos abordados com o intuito de verificar a performance e consistência do modelo e código desenvolvidos neste trabalho. O código foi escrito em Fortran 90/95, orientado a objeto, e utilizou o compilador da Compaq versão 6.5. e o posprocessamento foi realizado com o uso do software GID 8.0. Os resultados numéricos das análises aqui realizadas foram obtidos sob uma tolerância de convergência global de 10^{-6} .

- Exemplo 1: Neste exemplo é apresentada a tração de um corpo de prova retangular com dimensões de altura de 1 in e largura de 1 in , considerando o estado plano de deformações. Para este problema quase-estático, o corpo está sujeito a um deslocamento prescrito de $\bar{u} = 0,1t\text{ in}$, para $t \in [0, 1]$, e sendo as demais condições indicadas na figura 2.1. O intuito

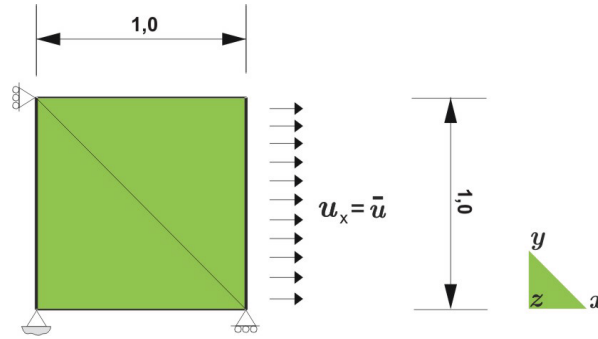


Figura 2.1: Teste uniaxial de tração (exemplo 1)

deste exemplo é verificar a eficiência do algoritmo numérico implementado, comparando os resultados numéricos obtidos com a solução analítica do problema considerado. A solução analítica foi construída de modo a determinar os carregamentos e deslocamentos prescritos responsáveis para que o estiramento exato tenha a forma $x(t) = \tilde{\lambda}_1(t)x_o$ e $y(t) = \tilde{\lambda}_2(t)y_o$. Tendo em vista as condições de contorno e supondo ser o bloco composto por concreto em que $G(t) = 151989e^{-0.001t} + 877289e^{-0.01t} + 677823$ (psi) obtem-se, como resultado da imposição de um coeficiente de poisson fixo $\nu = 0.3$, a função de relaxação para K dada por

$$K(t) = 101330e^{-0.001t} + 584860e^{-0.01t} + 451880 \text{ (psi)}.$$

A escala de tempo é tomada em dias, para maiores detalhamentos a respeito destas curvas ver [114]. Os resultados coincidiram com a solução exata do problema a cada instante analisado. Na figura 2.2 tem-se plotada a evolução da tensão de Cauchy σ_{xx} para um dia de observação, para um ponto típico do domínio. A figura 2.3 mostra o perfil de deslocamentos na direção x no instante final da análise, assim como na figura 2.4 tem-se o campo vetorial nodal de deslocamentos. Nesta análise, utilizou-se uma malha com dois elementos triangulares de seis nós. Outras malhas foram testadas mas nenhuma mudança nos resultados foi detectada. Neste exemplo utilizou-se a última formulação apresentada $(\bar{\tau}(t) = \mathbb{D}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t-\xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi)$.

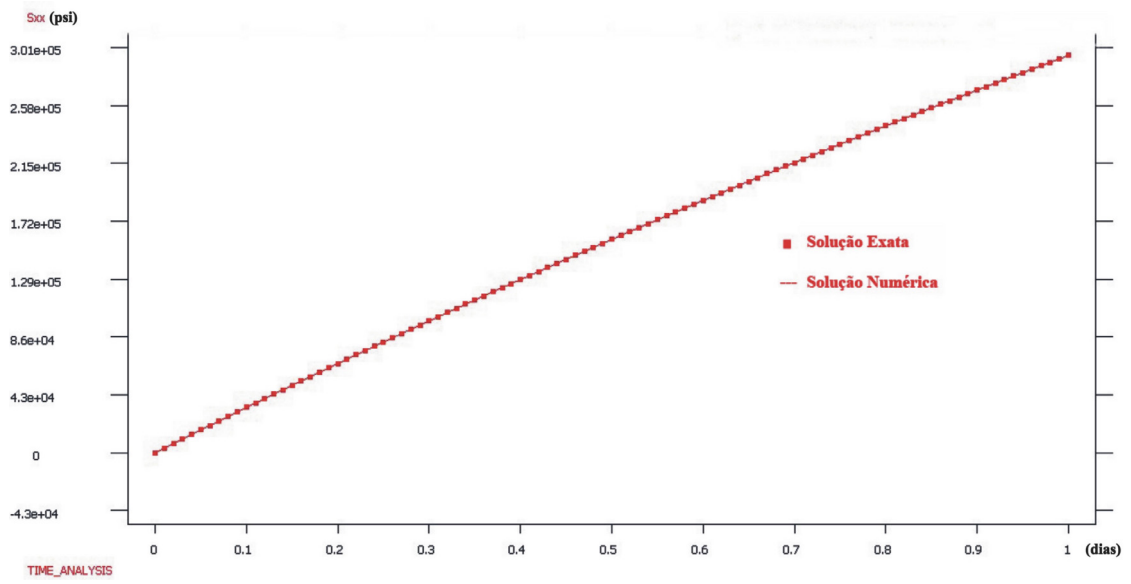
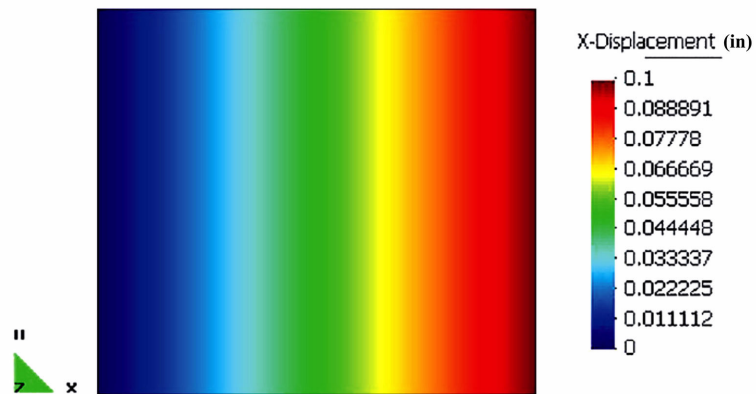
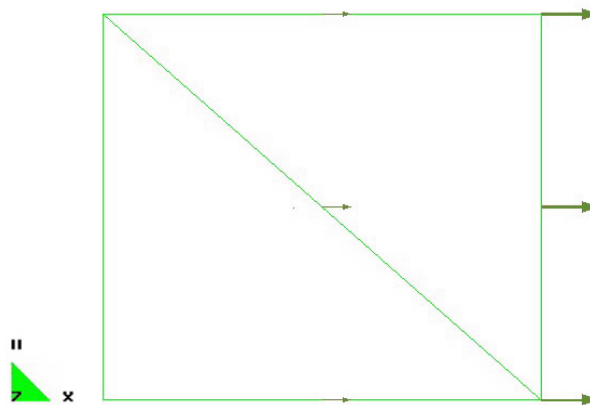
Figura 2.2: Evolução da tensão de Cauchy σ_{xx} (exemplo 1)Figura 2.3: Deslocamento na direção x (exemplo 1)

Figura 2.4: Vetores deslocamento nodais (exemplo 1)

- Exemplo 2: Este exemplo considera uma placa quadrada ($2in \times 2in$) com um furo circular de raio $0,2in$ no centro constituído do mesmo material utilizado no problema anterior e sob as hipóteses de estado plano de deformações. O corpo é submetido a uma condição de deslocamento prescrito de igual valor em suas laterais esquerda e direita, respectivamente e tendo as demais condições de tensão livre. Devido a uma questão de economia de esforço computacional foram impostas as condições de simetria para modelar 1/4 da placa, como mostra a figura 2.5. Na extremidade direita tem-se o seguinte deslocamento prescrito $\bar{u}(t) = 0,1t \text{ in}$, para $t \in [0, 1]$. O gráfico seguinte mostra a malha utilizada para

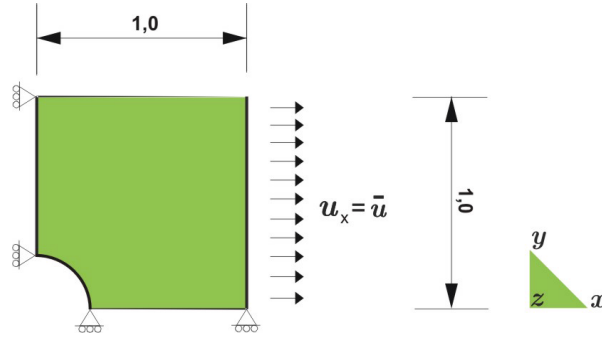


Figura 2.5: 1/4 da Placa com condição de simetria (exemplo 2)

este exemplo. Vale ressaltar que outras malhas, mais refinadas, foram analisadas e não se observou modificações relevantes nos resultados obtidos. Utilizou-se nesta análise 801

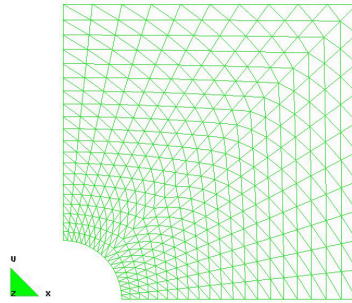


Figura 2.6: Malha utilizada (exemplo 2)

elementos triangulares de seis nós, totalizando 1682 nós, e quanto à integração numérica utilizou-se três pontos de integração de Gauss-Legendre em cada elemento. Outros testes foram feitos com um número maior de pontos de integração porém nenhuma alteração significativa nos resultados foi percebida. A figura 2.7 mostra o campo de deslocamentos ao final do período de observação. O gráfico seguinte (fig. 2.8) mostra a tensão σ_{xx} no instante final de observação. Note que os maiores níveis de tensão encontram-se na parte superior do orifício central da placa, o que está intuitivamente coerente. A figura 2.9 expõe a distribuição da componente de tensão σ_{yy} , em que se nota maiores níveis de tensão também na parte inferior do orifício central. Neste exemplo utilizou-se a última formulação apresentada ($\bar{\tau}(t) = \mathbb{D}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t - \xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi$).

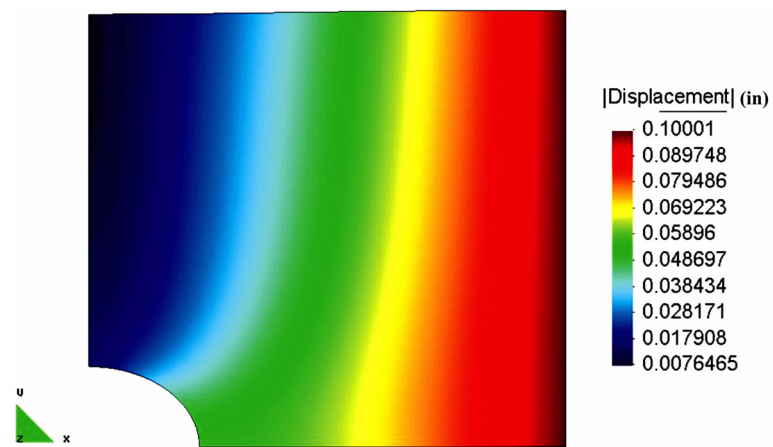
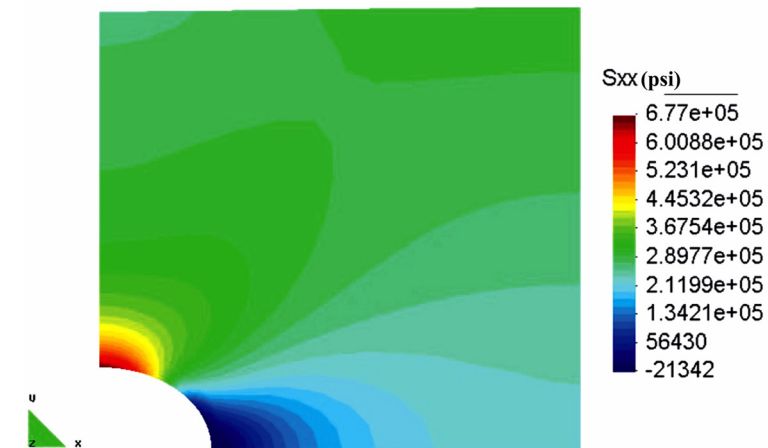
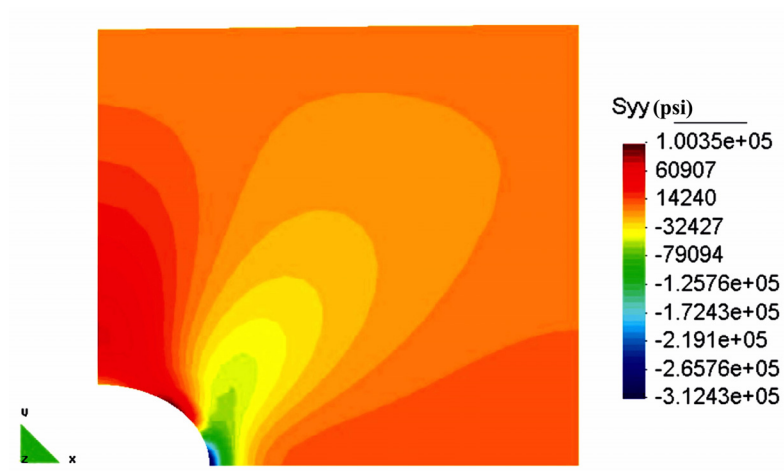


Figura 2.7: Campo de deslocamentos (exemplo 2)

Figura 2.8: Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 2)Figura 2.9: Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 2)

- Exemplo 3: Este exemplo possui uma geometria semelhante à do exemplo anterior. Considerou-se também as mesmas hipóteses de estado plano de deformações. O material constituinte da placa é um polímero cujas funções de relaxação são

$$\begin{aligned} G(t) &= 0,95e^{-3t} + 0,55 \text{ (psi) e} \\ K(t) &= 1,4e^{-2t} + 2,34e^{-0.34t} + 0,63333e^{-3t} + 4,0667 \text{ (psi)}. \end{aligned}$$

Para maiores detalhes veja [94] e [95]. A placa é submetida a uma condição de força normal prescrita de igual valor em suas laterais esquerda e direita respectivamente e tendo as demais condições de tensão livre. Novamente, devido a uma questão de economia de esforço computacional foram impostas condições de simetria visando modelar apenas 1/4 da placa, como mostra a figura 2.10. Na extremidade direita tem-se uma força normal compressiva distribuída uniformemente em toda a face cuja intensidade é de $\mathbf{f} = -0,1/b$, e sendo as demais condições de tração livre. O período de observação foi de $t \in [0, 1]$ (tomado em dias).

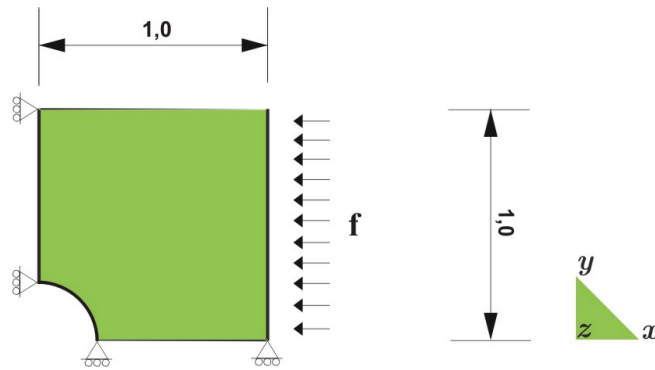


Figura 2.10: 1/4 da Placa com condição e simetria (exemplo 3)

A malha utilizada para a abordagem deste problema foi a mesma malha anterior, valendo ressaltar que foram feitas testes com outras malhas mais refinadas e nenhuma modificação mais relevante nos resultados foi percebida. Quanto à integração numérica, foram usados três pontos de integração de Gauss-Legendre por elemento. Novamente, não foram percebidas alterações nos resultados obtidos para este exemplo com o aumento do número de pontos de integração. As figuras seguintes mostram inicialmente a malha sobre a geometria inicial (fig. 2.11), e na figura seguinte tem-se o campo de deslocamentos ao final do período de observação (fig. 2.12). O gráfico seguinte (fig. 2.13) mostra a tensão σ_{xx} no instante final de observação. Note que os maiores níveis de tensão encontram-se na parte superior do orifício central da placa. Posteriormente tem-se a figura 2.14, na qual está disposta a tensão σ_{yy} no momento final de observação, em que se nota os maiores níveis de tensão na parte inferior do orifício central, havendo também uma considerável compressão na região imediatamente acima do orifício central. Neste exemplo utilizou-se a última formulação apresentada ($\bar{\tau}(t) = \mathbb{D}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t - \xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi$).

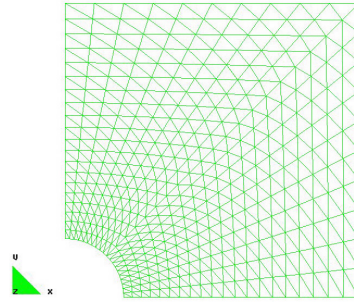


Figura 2.11: Malha sobre a geometria inicial do domínio (exemplo 3)

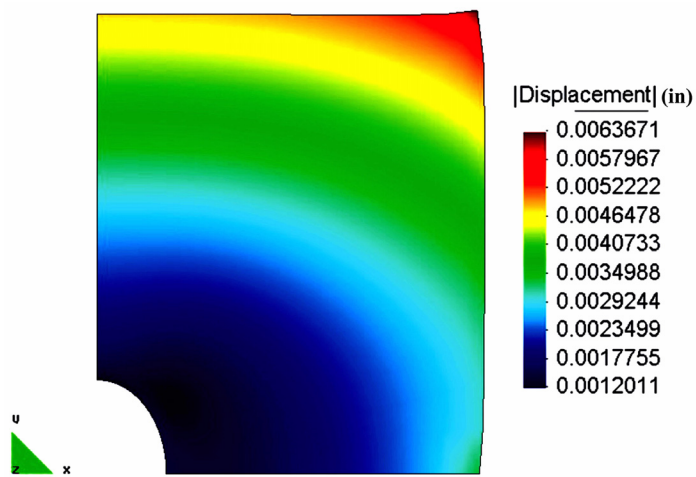


Figura 2.12: Campo de deslocamento ao final da análise (exemplo 3)

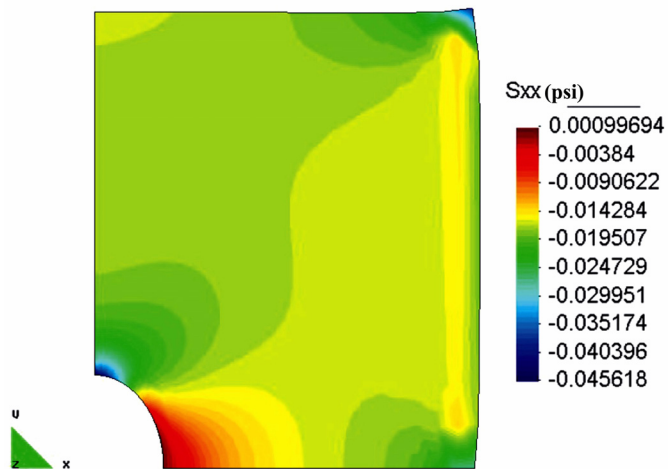


Figura 2.13: Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 3)

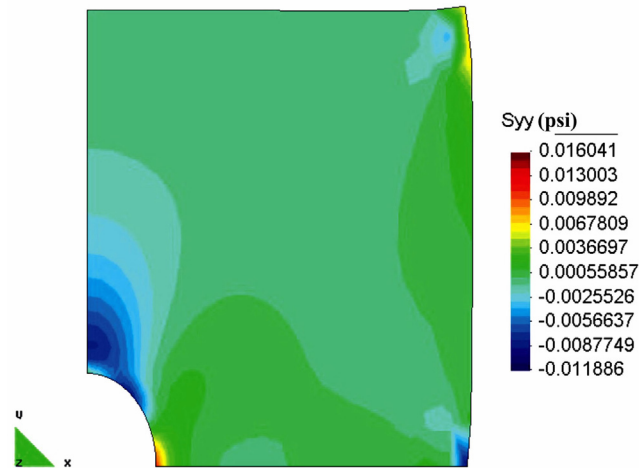


Figura 2.14: Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 3)

- Exemplo 4: Este exemplo possui a geometria do seu domínio sendo descrita por um trapézio reto, cujas faces lateral esquerda e superior medem $1in$ e a face direita mede $0,25in$. O material constituinte da placa é um polímero "Maranyl nylon 66", cujas funções de relaxação são

$$G(t) = 73855,4 + 155338,4e^{-0,00613977t} + 173441,6e^{-0,000181719t} \text{ (psi)};$$

$$K(t) = 344658,53 + 724912,53e^{-0,00613977t} + 809394,13e^{-0,000181719t} \text{ (psi)}.$$

Sob as considerações axisimétricas, o problema quase-estático tem as seguintes condições: a face esquerda encontra-se engastada ($u_x(0, y, t) = u_y(0, y, t) = 0$). Na face direita tem-se uma força vertical uniformemente aplicada e dada por $\mathbf{f} = 1150 \text{ lb}$, sendo as demais condições de tração livre, para $t \in [0, 1]$. Assim tem-se a configuração apresentada na figura (fig. 2.15). A malha utilizada para a abordagem deste problema é composta por

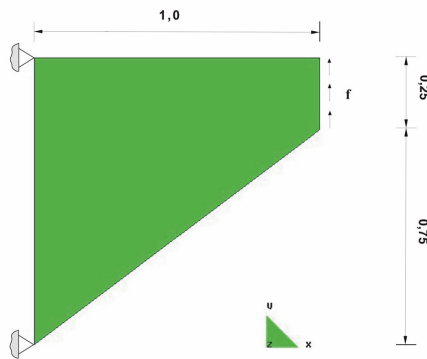


Figura 2.15: Problema axisimétrico

505 elementos triangulares de seis nós, totalizando 1074 nós. Vale comentar que foram

feitos testes com outras malhas mais refinadas e nenhuma modificação mais relevante nos resultados foi percebida. Quanto à integração numérica, foram usados três pontos de integração de Gauss-Legendre por elemento. Novamente, não foram percebidas alterações nos resultados obtidos para este exemplo com o aumento do número de pontos de integração. As figuras seguintes mostram a malha sobre a geometria inicial (fig. 2.16) e o campo de deslocamentos ao final do período de observação (fig. 2.17). O gráfico seguinte (fig. 2.18)

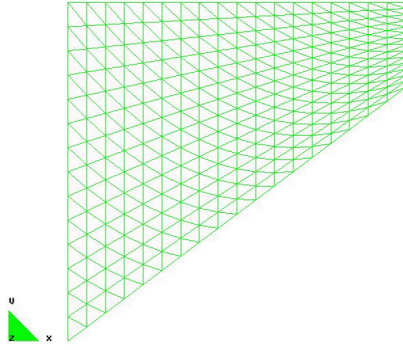


Figura 2.16: Malha sobre a geometria inicial do domínio (exemplo 4)

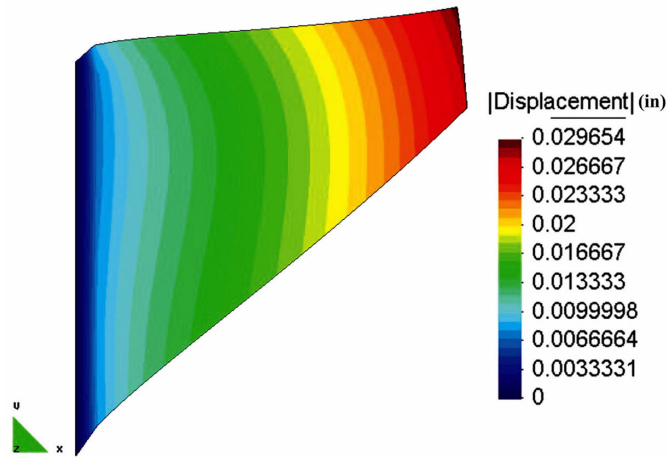


Figura 2.17: Campo de deslocamentos (exemplo 4)

mostra o perfil da tensão σ_{xx} no instante final de observação. Note que os maiores níveis de tensão encontram-se nas partes superior e inferior da lateral esquerda da peça. Perceba também que na parte superior o esforço acaba sendo compressivo enquanto que na parte inferior tem-se um esforço de tração. A figura 2.19 apresenta a distribuição da tensão σ_{xy} no instante final da análise. Observe que neste caso os maiores níveis de tensão encontram-se próximos da face esquerda da peça, onde esta encontra-se engastada. Posteriormente, tem-se a figura 2.20, na qual está disposta a componente σ_{yy} da tensão de Cauchy, em que se nota os maiores níveis na extremidade inferior esquerda da peça. Neste exemplo utilizou-se a última formulação apresentada ($\bar{\tau}(t) = \mathbb{D}(t)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbb{D}(t-\xi)\dot{\mathbf{E}}(\xi)d\xi$).

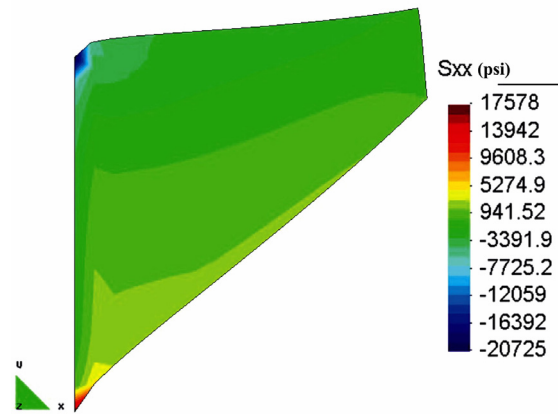


Figura 2.18: Componente σ_{xx} da tensão de Cauchy no instante final da análise (exemplo 4)

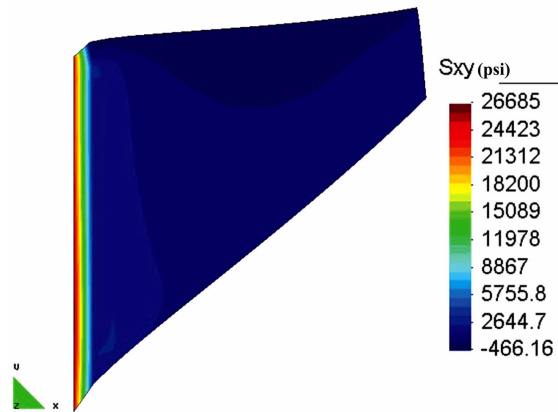


Figura 2.19: Tensão cisalhante (σ_{xy}) no final da análise (exemplo 4)

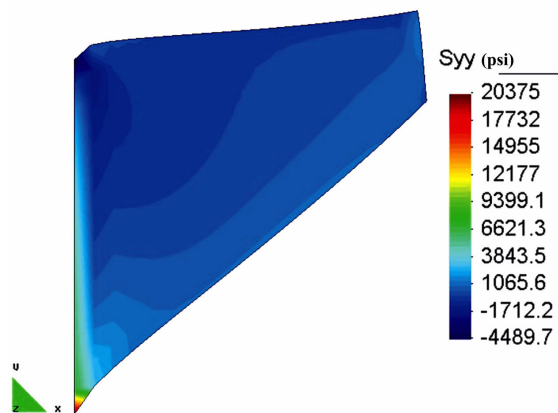


Figura 2.20: Componente σ_{yy} da tensão de Cauchy no instante final da análise (exemplo 4)

- Exemplo 5: Neste exemplo é apresentada a tração de um corpo de prova retangular com dimensões de altura igual a 1in e largura igual a 1in , considerando o estado plano de deformações. Para este problema quase-estático, o corpo está sujeito a um deslocamento prescrito de $\bar{u} = 0,1t\text{ in}$, para $t \in [0, 1]$ e sendo as demais condições de contorno ilustradas na figura 2.21. O intuito deste exemplo é verificar a eficiência do algo-

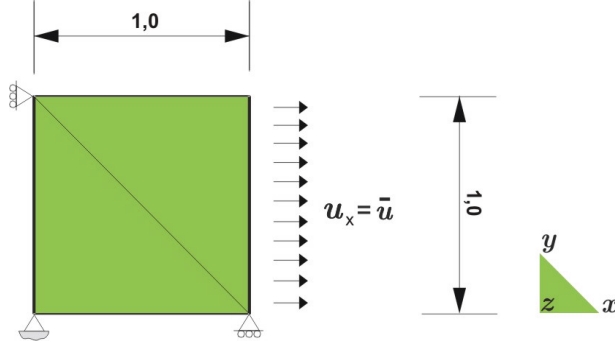
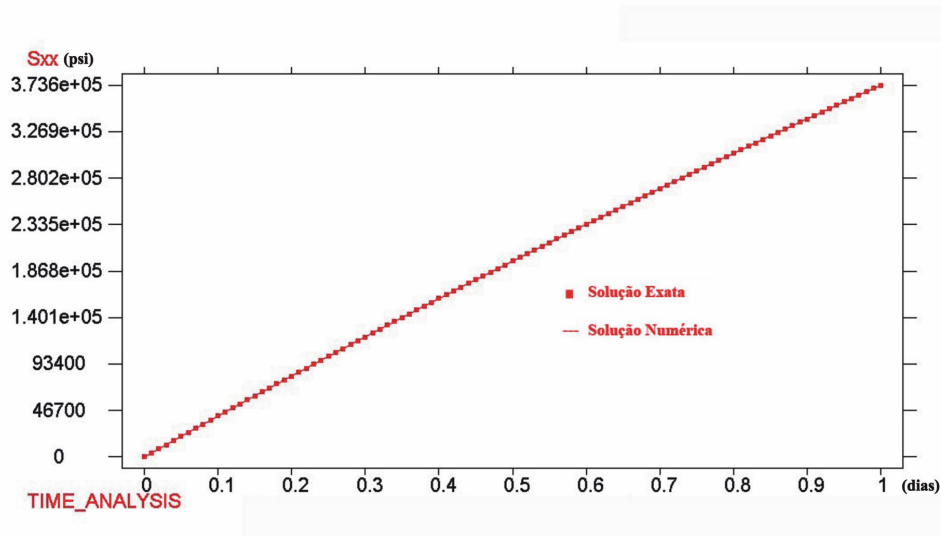


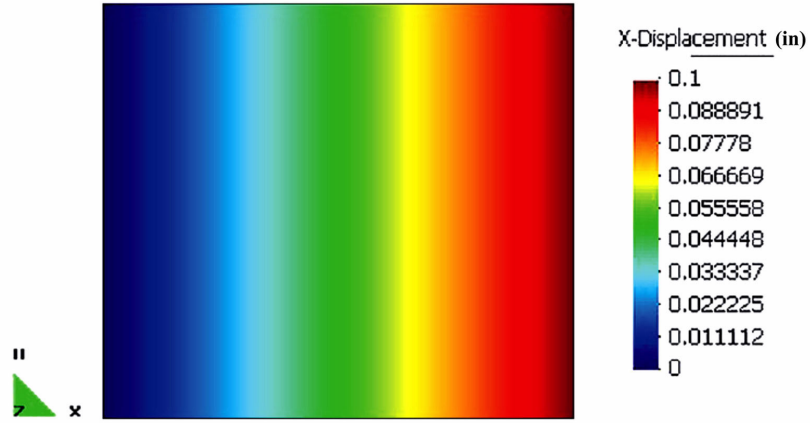
Figura 2.21: Teste uniaxial de tração (exemplo 5)

ritmo numérico implementado, comparando os resultados obtidos com a solução exata *artificial* do problema. Projetou-se os carregamentos e deslocamentos para que o estiramento exato tenha a forma $x(t) = \tilde{\lambda}_1(t)x_o$ e $y(t) = \tilde{\lambda}_2(t)y_o$. Tendo em vista as condições de contorno e supondo ser o bloco composto por um outro tipo de concreto em que $J(t) = 3.2386 \times 10^{-8}(1 - e^{-\frac{1}{20.2599}t}) + 5.8578 \times 10^{-7} \text{ (psi}^{-1}\text{)}$, do qual obtem-se, pela imposição de um coeficiente de poisson constante, a função de relaxação para B dada por

$$B(t) = 4.7279 \times 10^{-8}(1 - e^{-\frac{1}{19.8263}t}) + 8.7867 \times 10^{-7} \text{ (psi}^{-1}\text{)}.$$

A escala de tempo é tomada em dias, para maiores detalhamentos a respeito destas curvas

Figura 2.22: Evolução da tensão de Cauchy σ_{xx} (exemplo 5)

Figura 2.23: Deslocamento na direção x (exemplo 5)

ver [114]. Os resultados coincidiram com a solução exata do problema a cada instante analisado. Na figura 2.22 tem-se plotada a evolução da tensão de Cauchy σ_{xx} para um dia de observação, para um ponto típico do domínio. A figura 2.23 mostra o perfil de deslocamentos na direção x no instante final da análise, assim como na figura 2.24 tem-se o campo vetorial nodal de deslocamentos. Nesta análise, utilizou-se uma malha com dois

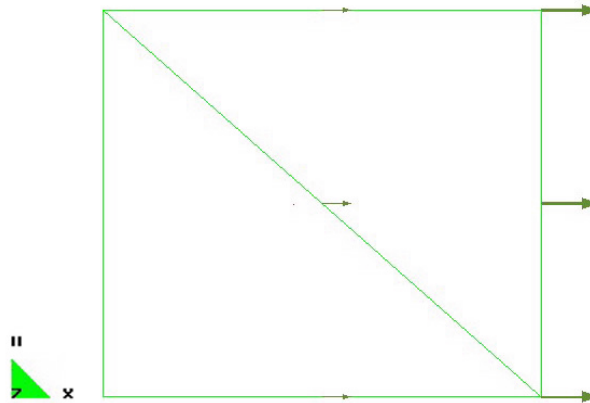


Figura 2.24: Vetores deslocamento nodais (exemplo 5)

elementos triangulares de seis nós. Outras malhas foram testadas mas nenhuma mudança nos resultados foi detectada. Neste exemplo utilizou-se a primeira formulação apresentada ($\mathbf{E}(t) = \mathbb{C}(t)\bar{\boldsymbol{\tau}}(0) + \int_0^t \mathbb{C}(t - \xi)\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\xi)d\xi$, estratégia 2).

- Exemplo 6: Este exemplo considera uma placa quadrada ($2in \times 2in$) com um furo circular de raio $0,2in$ no centro constituído do mesmo material utilizado no problema anterior e sob as hipóteses de estado plano de deformações. O corpo é submetido a uma condição de deslocamento prescrito de igual valor em suas laterais esquerda e direita respectivamente e tendo as demais condições de tensão livre. Devido a uma questão de economia de esforço computacional foram impostas condições de simetria visando modelar apenas 1/4 da

placa, como mostra a figura 2.25. Na extremidade direita tem-se o seguinte deslocamento prescrito $\bar{u}(t) = 0,1t$ in, para $t \in [0, 1]$. O gráfico seguinte mostra a malha utilizada para

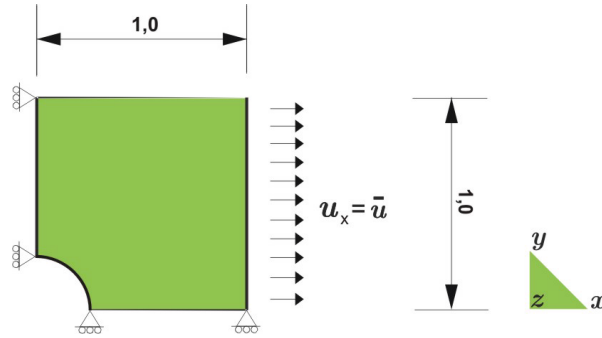


Figura 2.25: 1/4 da Placa com condição de simetria (exemplo 6)

este exemplo. Vale ressaltar que outras malhas, mais refinadas, foram analisadas e não se observou modificações relevantes nos resultados obtidos. Utilizou-se nesta análise 801

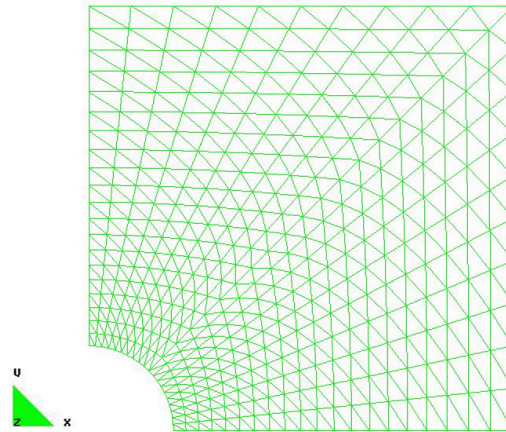


Figura 2.26: Malha utilizada (exemplo 6)

elementos triangulares de seis nós, totalizando 1682 nós. Quanto à integração numérica, utilizou-se três pontos de integração de Gauss-Legendre em cada elemento. Outros testes foram feitos com um número maior de pontos de integração. Porém nenhuma alteração significativa nos resultados foi percebida. A figura 2.27 mostra o campo de deslocamentos ao final do período de observação, assim como na figura 2.28 estão dispostos os vetores deslocamento nodais. O gráfico seguinte (fig. 2.29) mostra a tensão σ_{xx} no instante final de observação. Note que os maiores níveis de tensão encontram-se na parte superior do orifício central da placa, o que está intuitivamente coerente. Na figura 2.30 encontra-se a distribuição da tensão σ_{xy} , em que se nota os maiores níveis próximos à parte superior do orifício central. A figura 2.31 expõe o perfil da tensão σ_{yy} , em que se nota os maiores níveis também na parte inferior do orifício central. Neste exemplo utilizou-se a última formulação apresentada ($\mathbf{E}(t) = \mathbb{C}(t)\bar{\boldsymbol{\tau}}(0) + \int_0^t \mathbb{C}(t-\xi)\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\xi)d\xi$, estratégia 2).

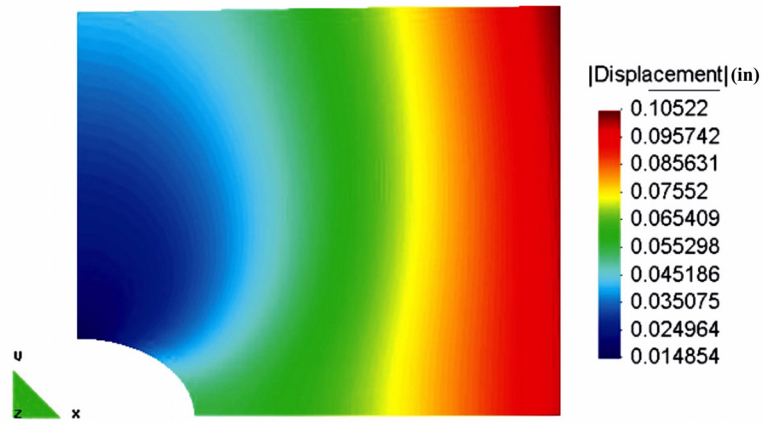


Figura 2.27: Campo de deslocamentos (exemplo 6)

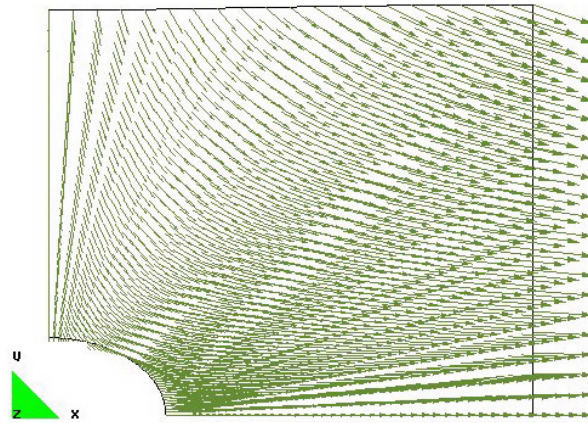


Figura 2.28: Vetores deslocamento nodais (exemplo 6)

Figura 2.29: Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 6)

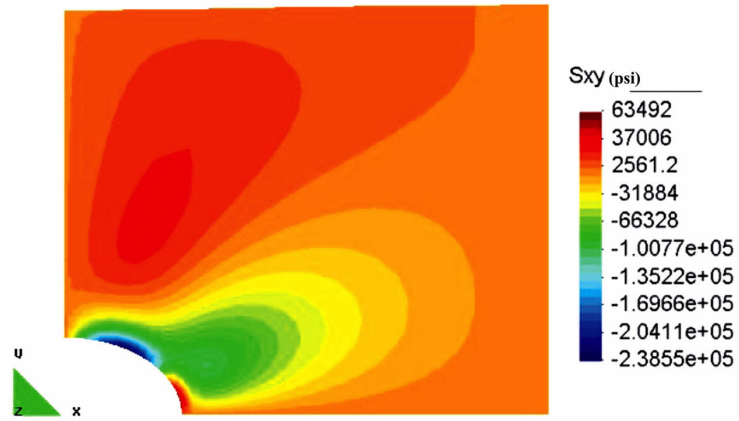


Figura 2.30: Componente σ_{xy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 6)

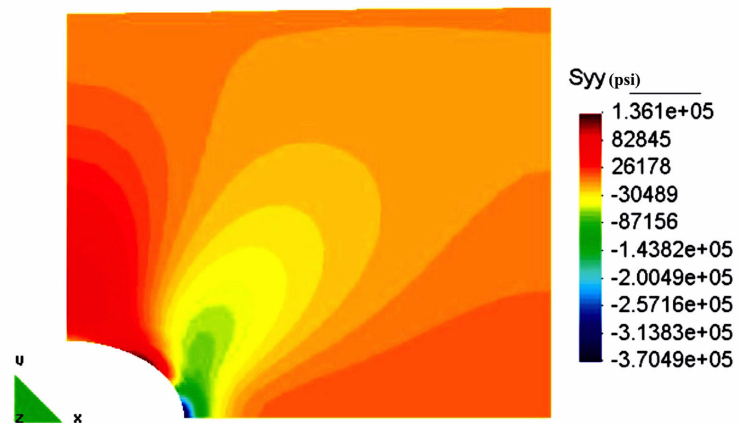


Figura 2.31: Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 6)

- Exemplo 7: Este exemplo considera um componente mecânico de geometria mais complexa, o qual é apresentado na figura 2.32 (dimensões em polegadas). O material constituinte do componente é o mesmo material utilizado nos casos imediatamente anteriores, considerando as hipóteses de estado plano de deformações. O corpo é submetido a uma condição de deslocamento prescrito em suas laterais esquerda e direita, conforme evidenciado na figura seguinte, tendo ainda as demais condições de tensão livre. Na extremidade direita tem-se o seguinte deslocamento prescrito $\bar{u}(t) = -0,3t$ in, para $t \in [0, 1]$. O gráfico

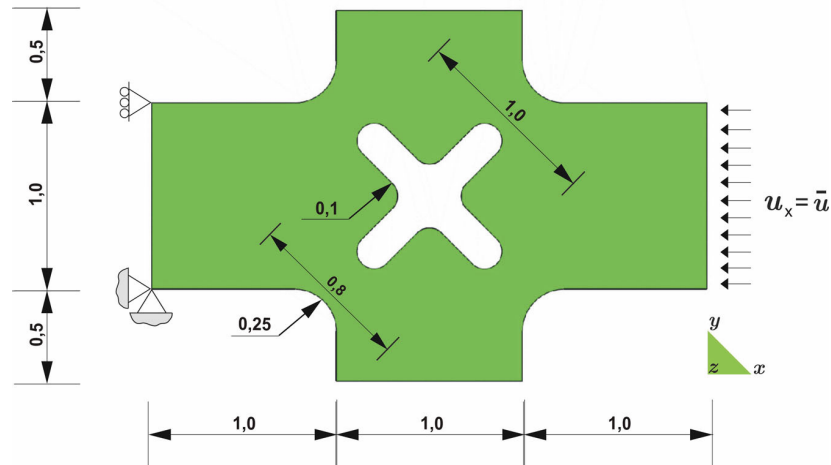


Figura 2.32: Esquematização do problema.

seguinte mostra a malha utilizada para este exemplo. Vale ressaltar que outras malhas, mais refinadas, foram analisadas e não se observou modificações relevantes nos resultados obtidos. Utilizou-se nesta análise 337 elementos triangulares de seis nós, totalizando

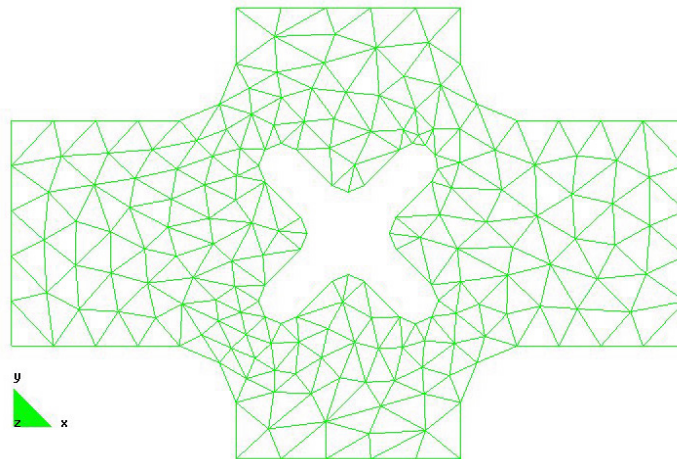


Figura 2.33: Malha utilizada (exemplo 7)

755 nós. Quanto à integração numérica, utilizou-se três pontos de integração de Gauss-Legendre em cada elemento. Outros testes foram feitos com um número maior de pontos de

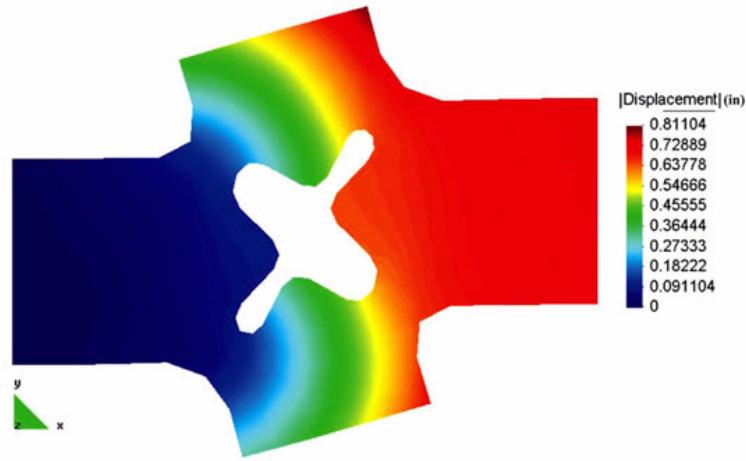


Figura 2.34: Campo de deslocamentos (exemplo 7)

integração. Porém nenhuma alteração significativa nos resultados foi percebida. A figura 2.34 mostra o campo de deslocamentos ao final do período de observação, assim como na figura 2.35 estão dispostos os vetores deslocamento nodais. O gráfico seguinte (fig. 2.36)

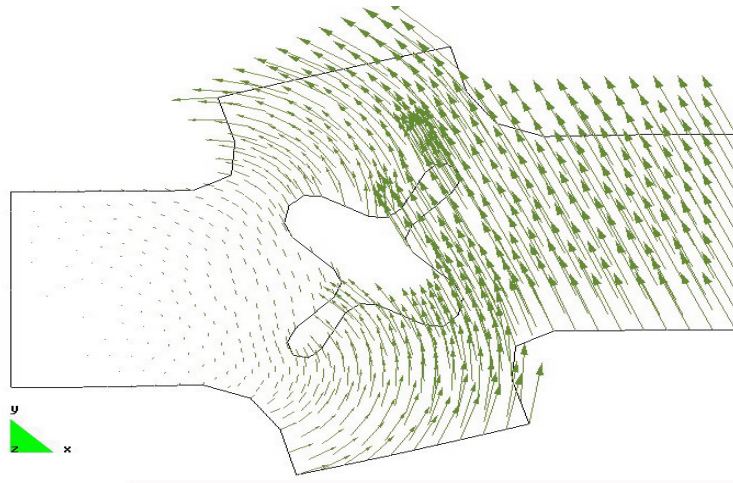


Figura 2.35: Vetores deslocamento nodais (exemplo 7)

mostra a tensão σ_{xx} no instante final de observação. Note que os maiores níveis de tensão encontram-se na parte superior direita e inferior esquerda do orifício central da placa, o que está intuitivamente coerente. Na figura 2.37 encontra-se o perfil da tensão σ_{xy} , em que se nota os maiores níveis próximos à parte superior direita e inferior esquerda do orifício. A figura 2.38 expõe a distribuição da tensão σ_{yy} , em que se nota os maiores níveis também na parte superior esquerda e inferior direita do orifício central. Neste exemplo utilizou-se a última formulação apresentada ($\mathbf{E}(t) = \mathbb{C}(t)\bar{\boldsymbol{\tau}}(0) + \int_0^t \mathbb{C}(t-\xi)\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}}(\xi)d\xi$, estratégia 2).

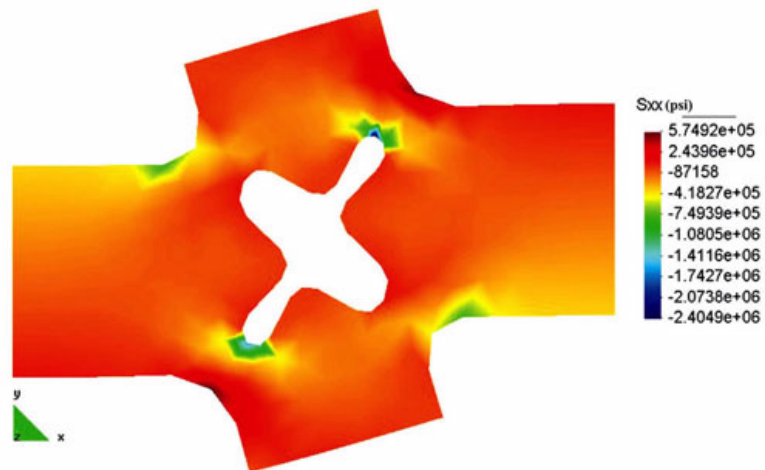


Figura 2.36: Componente σ_{xx} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 7)

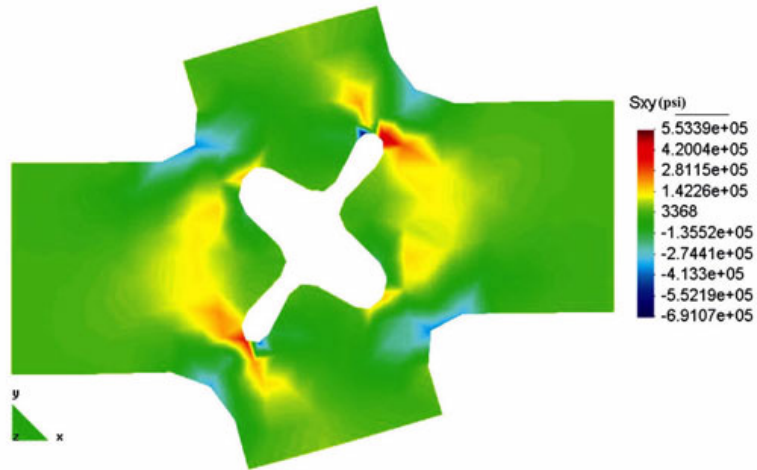


Figura 2.37: Componente σ_{xy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 7)

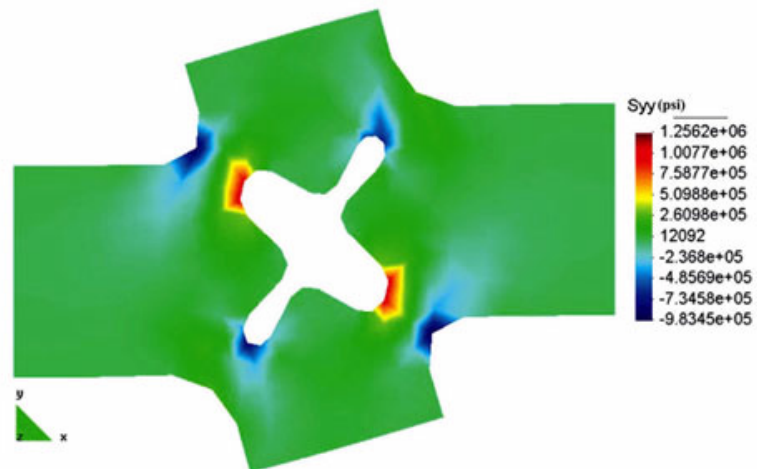


Figura 2.38: Componente σ_{yy} do tensor tensão de Cauchy (exemplo 7)

Capítulo 3

Um Modelo para Espumas Poliméricas

3.1 Introdução

O propósito deste tópico é a proposição de uma equação constitutiva elastoviscoplastica adequada a deformações finitas para uma classe de espumas poliméricas isotrópicas, a qual incorpore o fenômeno da sensibilidade à taxa de deformações na resposta do material. O modelo considera que o material tem um endurecimento caracterizado por duas curvas: uma para a compactação hidrostática e uma para o teste de compressão uniaxial, que devem ser determinadas experimentalmente. Adicionalmente, de acordo com as observações experimentais, o modelo deve incorporar um comportamento diferente sob compressão e sob tração, e deve incorporar a dependência da densidade relativa do material em sua resposta hiperelástica. Sob compressão a habilidade do material de se deformar volumetricamente é intensificada pelo processo de empenamento das paredes das células como descrito em [48] e [49]. Considera-se que a deformação das células da espuma não são revertidas imediatamente após a retirada da carga e desta forma podem ser vistas como estruturas viscoplasticas. Sob o carregamento trativo, as paredes celulares literalmente *quebram*, de onde conclui-se que em carregamentos trativos a capacidade de *deformação* da espuma pode ser consideravelmente menor do que a capacidade de esmagamento sob carregamento compressivo.

Espumas poliméricas são compostas por uma estrutura de células abertas ou fechadas, que representa a unidade básica destes materiais. O comportamento mecânico das espumas poliméricas depende das características geométricas das células, tal como espessura da parede das células, forma, tamanho, distribuição e de propriedades intrínsecas do polímero que compõe a parede da célula. Objetivando o modelamento de tais materiais complexos, diferentes relações constitutivas têm sido propostas na literatura e didaticamente podem ser divididas em dois grandes grupos: modelos sofisticados que propõem equações constitutivas que descrevem o comportamento homogeneizado da espuma e os modelos mais simples que representam as células como uma composição de elementos estruturais, veja [48] e [65].

O trabalho aqui presente considera a primeira abordagem acima mencionada e propõe uma

equação constitutiva hiperelástica-viscoplástica para modelar o comportamento de uma célula aberta do material da espuma. Vale ressaltar que baseado em resultados experimentais da literatura, pode-se considerar o comportamento hiperelástico como dependente da densidade relativa do material, veja [88] e [89]. Entre as mais variadas propostas de equações constitutivas, pode-se destacar o *modelo da lei de potência* descrito em [25], que geralmente fornece bons resultados para taxas de deformação baixas. Porém, com o aumento da taxa de deformação, tal modelo não mostrou-se apto a descrever o decréscimo da dependência da taxa de deformação. Um outro ponto importante é que no caso limite, com o crescimento da taxa de deformação, o modelo deve ser capaz de calcular o ponto de saturação da reação do material, como observado experimentalmente. A incorporação deste comportamento do material em um modelo viscoplástico unificado, originou outras propostas para as funções de escoamento que tem sido apresentadas na literatura. Exemplos desta abordagem incluem uma função seno hiperbólico, veja [77], uma função exponencial ou a adição de uma função de segunda potência na lei de potência para a função de escoamento, como proposto por [23] e [24]. Alguns modelos mesclam plasticidade e viscoplasticidade com o intuito de representar tal comportamento, como visto em [5].

O presente trabalho fará uso da equação constitutiva para viscoplasticidade proposta por *Benallal*, veja [67], a qual pode ser aplicada em alta taxas de deformação e pode levar em conta a saturação da sobre-tensão em que a taxa de deformação é muito elevada. A concepção de um modelo viscoplástico para espumas poliméricas deve levar em conta a incorporação dos seguintes fenômenos:

- Fluência ou relaxação: O fenômeno da fluência é ilustrado na figura 3.1, no qual a curva

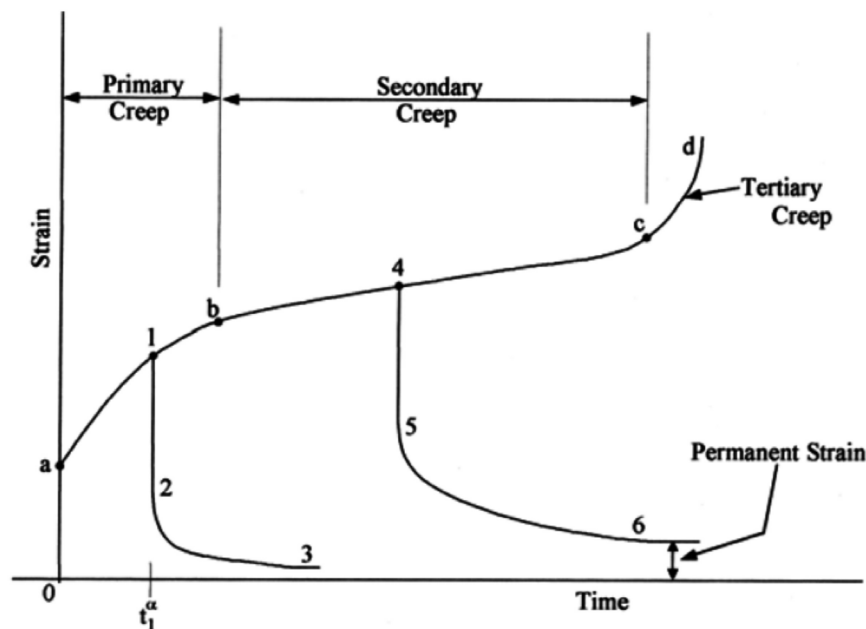


Figura 3.1: Comportamento esquemático de fluência ([33])

($abcd$) mostra o aumento da deformação em função do tempo, como resultado de um carregamento constante aplicado. A resposta (elástica) instantânea ($0 - a$) é seguida pela

fluência primária ou elástica ($a-b$) durante a qual, se ocorrer um descarregamento (no instante t_1), haverá uma resposta elástica (1-2) e posteriormente ocorrerá um retardamento viscoelástico (2-3), resultando no estado original. Caso o carregamento continue após b , a fluência secundária tem início, acompanhada de deformações *permanentes*. Havendo um descarregamento em qualquer instante (entre $b-c$), por exemplo no ponto 4, haverá novamente uma resposta elástica (4-5) e posteriormente ocorrerá um retardamento viscoelástico (5-6), porém neste caso ocorrerá o aparecimento de uma deformação permanente (viscoplástica). A fluência terciária ($c-d$), leva a uma conseqüente fratura, ocorrida após a fluência secundária. Assim, didaticamente, o fenômeno da fluência pode ser dividido em três estágios:

1. Fluência primária, na qual observa-se um decréscimo na taxa de deformação devido ao endurecimento do material;
2. Fluência secundária, na qual a taxa de deformação é praticamente constante, i.e., $\dot{\epsilon} \simeq \text{cte}$;
3. Fluência terciária, na qual percebe-se um rápido aumento na taxa de deformação, devido a: uma redução da área de secção transversal e ao efeito do dano devido à nucleação, crescimento e coalescência de microvazios.

Vale ressaltar ainda que alguns materiais podem possuir um nível relevante de fluência elástica, enquanto que outros podem ter um comportamento referente a fluência predominantemente viscoplástica. Porém, para alguns materiais ambas as considerações podem ser necessárias. Para estes modelos mais gerais, o comportamento no que diz respeito à fluência (excluindo a fluência terciária) é referenciado como elastoviscoplástico (evp). Aqui neste capítulo o comportamento a ser explorado será o elastoviscoplástico (evp) que é amplamente estudado no contexto de procedimentos numéricos e tem produzido muitas soluções satisfatórias para vários problemas em engenharia.

- Sensibilidade à taxa de deformação:

O comportamento de grande parte dos materiais em engenharia depende da taxa de carregamento, que é comumente designada como taxa de deformação, $\dot{\epsilon}$, ou taxa de deslocamento. A figura 3.2 mostra de forma esquemática ($\dot{\epsilon}_1 < \dot{\epsilon}_2 < \dot{\epsilon}_3$) tal comportamento sob diferentes taxas de carregamento monotônicas. O comportamento designado na figura como *estático* refere-se a uma baixa taxa de carregamento. Quando esta taxa cresce, o material exibe um comportamento mais resistente até um limite máximo ou falha. Assim, tem-se ilustrada a influência da taxa de deformação aplicada na relação tensão-deformação. Nota-se também a existência de um comportamento elástico linear do material. Todavia, segundo [17], para se ter a existência de um comportamento elástico (distensão e retração), deve-se ter uma taxa de deformação $\dot{\epsilon} > 10^{-3} \text{s}^{-1}$. O comportamento com taxas $\dot{\epsilon} \leq 10^{-3} \text{s}^{-1}$ inibe a existência de uma função de escoamento. Porém é importante relatar que, ainda segundo [17], se a temperatura do corpo é muito elevada, a existência da função de escoamento pode ser também questionada, desde que o material tenha uma tendência a se comportar como um fluido viscoso. O presente trabalho

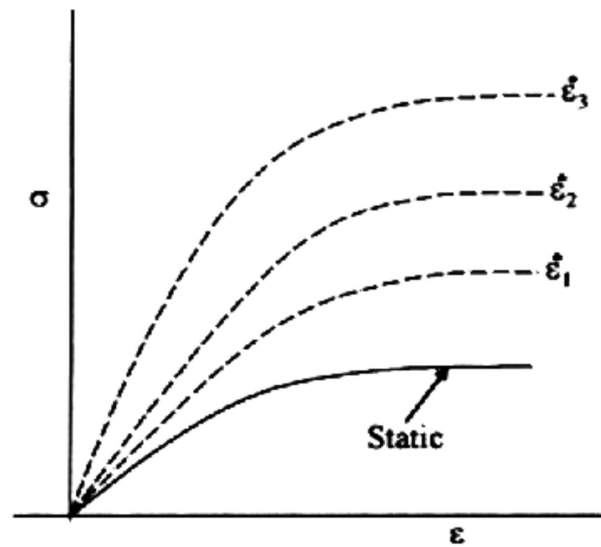


Figura 3.2: Sensibilidade à taxa de deformação do material ([33])

considera baixos níveis de temperatura e taxas de deformações suficientemente altas para deste modo poder-se considerar o comportamento elástico e a existência da superfície de escoamento. Considerando altas temperaturas, vários materiais podem ser modelados como se escoassem sob qualquer tensão, i.e., a tensão de escoamento é efetivamente zero. Estes casos tem a peculiaridade de não necessitarem de uma superfície de escoamento e de um domínio elástico correspondente para a formulação de sua teoria. Modelos viscoplásticos sem superfícies de escoamento têm sido amplamente usados, especialmente em análises de fluência e em operações de forjamento de metal a quente (ver [3] e [9]).

3.2 A Formulação Adotada

Este capítulo apresenta os aspectos da formulação adotada para se resolver problemas relacionados a espumas poliméricas (elastoviscoplasticidade) em grandes deformações conjuntamente com a discretização feita pelo MEF. Especificamente, a formulação adotada considera:

- uma descrição *Lagrangeana Total*;
- a decomposição multiplicativa do gradiente de deformação em uma parte viscoplástica e uma parte elástica;
- que as equações constitutivas serão dadas em termos da medida logarítmica de deformação e da tensão rotacionada de *Kirchhoff*. O uso deste par conjugado, definido na configuração *não rotacionada*, torna possível a utilização do chamado *mapeamento exponencial* que, por sua vez, proporciona o uso dos algoritmos de mapeamento de retorno no mesmo formato que os encontrados em pequenas deformações.

O uso da medida de tensão rotacionada de *Kirchhoff* e da medida de deformação logarítmica, $\ln(\mathbf{U})$, foi primeiro descrita por [42] e [120]. Os trabalhos citados fazem uso da medida loga-

rítmica de deformação juntamente com o mapeamento exponencial para obter o algoritmo de mapeamento de retorno de forma bastante similar aos encontrados em problemas de pequenas deformações. Estas propostas foram também estudadas por [96], [83] e [8]. Já nos trabalhos apresentados por [105] e [84] é utilizada uma descrição *Euleriana* baseada na tensão de *Kirchhoff* e na medida de deformação logarítmica $\ln(\mathbf{V})$.

A fim de avaliar numericamente a performance do código desenvolvido neste trabalho serão apresentadas algumas aplicações sob as hipóteses axissimétrica e de estado plano de deformações.

3.3 Decomposição Multiplicativa

A principal hipótese adotada na formulação elastoviscoplastica de grandes deformações apresentada aqui é a da decomposição multiplicativa do tensor gradiente de deformação, \mathbf{F} , em uma contribuição viscoplastica e outra elástica, isto é,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp} \quad (3.1)$$

em que \mathbf{F}^e e \mathbf{F}^{vp} são respectivamente a parte elástica e viscoplastica de \mathbf{F} . Está hipótese inclui a suposição da existência de um estado local *não tensionado*, i.e., livre de tensões, definido por \mathbf{F}^{vp} .

Considere que Ω_o representa a configuração de referência e Ω_t a configuração corrente. Relembrando-se agora de algumas definições e fatos, como a função movimento φ que leva um ponto $\mathbf{x}_o \in \Omega_o$ a um ponto $\mathbf{x} \in \Omega_t$ e que é definida por

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t) \quad (3.2)$$

em que

$$\varphi(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{x}_o + \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Assim, o gradiente de deformação é dado por

$$\mathbf{F} = \nabla \varphi(\mathbf{x}_o, t). \quad (3.4)$$

Da adoção da decomposição multiplicativa de \mathbf{F} decorrem muitos resultados importantes sobre a cinemática da deformação do corpo. O campo espacial denominado gradiente da velocidade é, por sua vez, escrito como

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$$

na qual $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ é a descrição Euleriana da velocidade. O tensor gradiente da velocidade pode ainda ser decomposto em uma parte elástica e outra viscoplastica da seguinte forma

$$\mathbf{L}(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{vp} \quad (3.5)$$

com $\mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1}$ e $\mathbf{L}^{vp} = \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}$.

Desta forma o tensor taxa de deformação, \mathbf{D} , dado pela parte simétrica de \mathbf{L} , pode ser

também decomposto como

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \text{sym}(\mathbf{L}) = \text{sym}(\mathbf{L}^e) + \text{sym}(\mathbf{L}^{vp}) \\ &= \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{vp}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Uma condição imposta sobre as deformações é que $\det(\mathbf{F}) > 0$ ¹, o que implica em $\det(\mathbf{F}^{vp}) > 0$, uma vez que supõe-se $\det(\mathbf{F}^e) > 0$. Deste modo, cada um dos termos do gradiente da deformação admite decomposição polar, isto é,

$$\mathbf{F}^{vp} = \mathbf{R}^{vp}\mathbf{U}^{vp} \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{R}^e\mathbf{U}^e \quad (3.7)$$

onde \mathbf{R}^{vp} e $\mathbf{R}^e \in \text{ort}^+$, isto é, \mathbf{R}^{vp} e \mathbf{R}^e são tensores ortogonais próprios e \mathbf{U}^{vp} e \mathbf{U}^e são tensores simétricos positivos definidos. De modo geral, pode-se ainda escrever que

$$\mathbf{U}^e = \sqrt{\mathbf{C}^e} \quad (3.8)$$

na qual \mathbf{C} é o tensor de Cauchy-Green à direita dado por

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{F}^{eT}\mathbf{F}^e. \quad (3.9)$$

A medida de deformação adotada é a medida de deformação logarítmica ou medida de deformação de Hencky a qual, neste capítulo, é designada por \mathbf{E}^e , dada por²

$$\mathbf{E}^e = \ln(\mathbf{U}^e). \quad (3.10)$$

3.4 Pares Conjugados Tensão-Deformação

Lembrando que o tensor tensão de *Kirchhoff* é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (3.11)$$

com

$$J = \det(\mathbf{F}) \quad (3.12)$$

$$= \frac{\rho_o}{\rho} \quad (3.13)$$

na qual ρ_o e ρ são as densidades de massa na configuração de referência e na configuração corrente respectivamente. Tem-se segundo o trabalho proposto por [58] que os pares de tensão-deformação devem ser tais que a taxa de trabalho por unidade de massa \dot{W} seja invariante, isto

¹ $\det(\mathbf{F}) = 1$ - deformações isocóricas.

²É possível definir a chamada família *Lagrangeana* de deformação dada por

$$\mathbf{E}^m = \begin{cases} \frac{1}{m}(\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{para } m \neq 0 \\ \ln(\mathbf{U}) & \text{para } m = 0 \end{cases}$$

é

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{\rho_o} \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\rho_o} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{\rho_o} \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \dot{\mathbf{E}}, \quad (3.14)$$

em que \mathbf{P} é o primeiro tensor tensão de *Piola-Kirchhoff*, \mathbf{S} é o segundo tensor tensão de *Piola-Kirchhoff* e $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ é o tensor tensão rotacionado de *Kirchhoff*, dado por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e. \quad (3.15)$$

Recordando também que o tensor \mathbf{C} admite *decomposição espectral*, isto é

$$\mathbf{C}^e = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i (\Phi_i \otimes \Phi_i) \quad (3.16)$$

em que Λ_i são os autovalores e Φ_i são os autovetores de \mathbf{C}^e , é fácil verificar ainda que \mathbf{U}^e possui os mesmos autovalores de \mathbf{C}^e , i.e.

$$\mathbf{U}^e = \sum_{i=1}^3 \sqrt{\Lambda_i} (\Phi_i \otimes \Phi_i). \quad (3.17)$$

Como $\ln(\mathbf{U}^e)$ é uma função tensorial isotrópica, veja **Apêndice C**, tem-se

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ln(\Lambda_i) (\Phi_i \otimes \Phi_i). \quad (3.18)$$

3.5 Lei Constitutiva, Potencial de Energia Livre e de Dissipação

Dentro do enfoque da *termodinâmica dos processos irreversíveis*, o potencial de energia livre Ψ é construído de modo a ter a seguinte forma geral

$$\Psi = \Psi(\mathbf{E}^e, \boldsymbol{\alpha}_k) \quad (3.19)$$

em que $\boldsymbol{\alpha}_k$ é um conjunto de variáveis internas associadas aos mecanismos dissipativos envolvidos no processo irreversível.

A inequação fundamental de *Clausius-Duhem* é dada por

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \left(\dot{\Psi} + s\dot{T} \right) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (3.20)$$

na qual s é a entropia específica, $T = T(\mathbf{x}, t)$ é a temperatura absoluta e \mathbf{q} é o vetor fluxo de calor. Agora, considerando eq.(3.6) temos

$$\boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{vp}) - \rho \left(\dot{\Psi} + s\dot{T} \right) - \mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \quad (3.21)$$

e multiplicando esta última inequação por J (lembre-se $J > 0$), eq.(3.12), tem-se

$$\boldsymbol{\tau} : (\mathbf{D}^e + \mathbf{D}^{vp}) - \rho_o \left(\dot{\Psi} + s\dot{T} \right) - J\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0. \quad (3.22)$$

Pela imposição da conservação da taxa de trabalho elástico,

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^e = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}^e$$

obtem-se então

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^{vp} - \rho_o \left(\dot{\Psi} + s\dot{T} \right) - J\mathbf{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0. \quad (3.23)$$

Tomando agora a taxa $\dot{\Psi}$, eq.(3.19), juntamente com a consideração de que o processo seja *isotérmico*, a eq.(3.23) fica

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}^e + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^{vp} - \rho_o \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^e} : \dot{\mathbf{E}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \right) \geq 0.$$

Reagrupando os termos, tem-se

$$\left(\bar{\boldsymbol{\tau}} - \rho_o \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^{ve}} \right) : \dot{\mathbf{E}}^{ve} + \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^{vp} - \rho_o \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.24)$$

Ainda supondo que a eq.(3.24) deva ser satisfeita para todos os processos reais, pode-se escrever

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \rho_o \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^e} \quad (3.25)$$

e definir

$$\boldsymbol{\beta}_k = \rho_o \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_k}, \quad (3.26)$$

na qual $\boldsymbol{\beta}_k$ é um conjunto de pares associados às variáveis internas $\boldsymbol{\alpha}_k$, chamadas de forças termo-dinâmicas. Devido a estas definições a eq.(3.24) fica reescrita como

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.27)$$

Taxa de Deformação Viscopoplástica Modificada

É conveniente introduzir, neste ponto, a contribuição viscopoplástica modificada para o gradiente da velocidade

$$\check{\mathbf{L}}^{vp} = (\mathbf{F}^e)^{-1} \mathbf{L}^{vp} \mathbf{F}^e; \quad (3.28)$$

$$= \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1}, \quad (3.29)$$

em que $\check{\mathbf{L}}^{vp}$ é obtido pelo transporte de \mathbf{L}^{vp} para a configuração local *não tensionada*. Pode-se ainda decompor $\check{\mathbf{L}}^{vp}$ em sua parte simétrica $\check{\mathbf{D}}^{vp}$, associada ao estiramento viscopoplástico, e antissimétrica $\check{\mathbf{W}}^{vp}$, associada à rotação viscopoplástica, isto é,

$$\check{\mathbf{L}}^{vp} = \text{sym} \left(\check{\mathbf{L}}^{vp} \right) + \text{skew} \left(\check{\mathbf{L}}^{vp} \right) \quad (3.30)$$

$$= \check{\mathbf{D}}^{vp} + \check{\mathbf{W}}^{vp}. \quad (3.31)$$

Agora, como o sólido elastoviscopoplástico é considerado isotrópico em cada configuração local

não tensionada, o termo de rotação viscoplástica é tomado como nulo, [120] e [107], isto é,

$$\check{\mathbf{W}}^{vp} = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Isto implica que a Eq.(3.27) possa ser escrita como

$$\boldsymbol{\tau} : \mathbf{F}^e \check{\mathbf{D}}^{vp} (\mathbf{F}^e)^{-1} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0 \quad (3.33)$$

ou ainda³

$$(\mathbf{F}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}^e)^{-T} : \check{\mathbf{D}}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.34)$$

Fazendo uso da decomposição polar temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^T \boldsymbol{\tau} (\mathbf{R}^e \mathbf{U}^e)^{-T} & : \check{\mathbf{D}}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0; \\ \mathbf{U}^e (\mathbf{R}^e)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e (\mathbf{U}^e)^{-1} & : \check{\mathbf{D}}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0; \\ \mathbf{U}^e \bar{\boldsymbol{\tau}} (\mathbf{U}^e)^{-1} & : \check{\mathbf{D}}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0; \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} & : (\mathbf{U}^e)^{-1} \check{\mathbf{D}}^{vp} \mathbf{U}^e - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como a relação constitutiva, eqs.(3.17 e 3.18), é isotrópica a inequação fundamental de *Clausius-Duhem* reduz-se à

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\mathbf{D}}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.36)$$

A Função de Escoamento

Seguindo a formulação adotada neste trabalho, o domínio elástico é definido por meio de uma função de escoamento a qual depende da tensão rotacionada de *Kirchhoff* e das forças termodinâmicas, i.e.,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k). \quad (3.37)$$

Desta forma, pode-se definir o chamado conjunto das tensões admissíveis \mathcal{E} dado por

$$\mathcal{E} = \{ \bar{\boldsymbol{\tau}} \mid \mathcal{F}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k) \leq 0 \}. \quad (3.38)$$

Potencial de Dissipação e Leis de Evolução

A dissipação associada ao problema puramente mecânico é definida por

$$\mathcal{D} = \bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\mathbf{D}}^{vp} - \boldsymbol{\beta}_k \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k \geq 0. \quad (3.39)$$

A fim de obter as leis complementares de evolução do processo dissipativo, é postulada a existência de um potencial de dissipação

$$\Pi = \Pi(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\beta}_k; \boldsymbol{\alpha}_k), \quad (3.40)$$

³ $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{S}$

o qual é um funcional escalar, convexo e nulo na origem, com relação aos argumentos $(\bar{\tau}, \beta_k)$. É possível mostrar que pelo uso da hipótese de dissipação normal, o processo evolutivo fica definido por

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{\tau}} \quad (3.41)$$

$$\dot{\alpha}_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial \beta_k}. \quad (3.42)$$

Vale ressaltar que no caso do modelo de viscoplasticidade ser considerado associativo, o potencial de dissipação é tomado como sendo a função indicatriz do conjunto \mathcal{E} . Neste caso, como resultado da aplicação da hipótese de dissipação normal, obtem-se $(\bar{\mathbf{D}}^{vp}, \dot{\alpha}_k) \in \check{\partial} \Pi$, i.e., $(\bar{\mathbf{D}}^{vp}, \dot{\alpha}_k)$ pertence ao conjunto dos subgradiantes de Π em $(\bar{\tau}, \beta_k; \alpha_k)$. A determinação desta subdiferencial permite determinar que a evolução da taxa de deformação viscoplástica modificada $\bar{\mathbf{D}}^{vp}$, pode ser escrita como

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\tau}} \quad (3.43)$$

e a evolução das variáveis internas fica determinada por

$$\dot{\alpha}_k = -\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta_k}, \quad (3.44)$$

em que $\dot{\lambda}$ designa a taxa do multiplicador viscoplástico.

3.6 Um Problema de Valor Inicial Elastoviscoplástico

O presente contexto mostra que as variáveis desconhecidas do problema de valor inicial elastoviscoplástico são: o gradiente da deformação viscoplástica \mathbf{F}^{vp} e o vetor de variáveis internas α . Assim, as condições iniciais são:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{vp}(t_o) &= \mathbf{F}_o^{vp}, \\ \alpha(t_o) &= \alpha_o. \end{aligned} \quad (3.45)$$

O problema está sujeito a uma história do gradiente de deformação, $\mathbf{F}(t)$, $t \in [t_o, t_f]$, e desta forma o problema de valor inicial consiste em determinar \mathbf{F}^{vp} e α tais que as equações constitutivas dadas pelas eq.(3.25), eq.(3.43) e eq.(3.44) sejam satisfeitas para $t \in [t_o, t_f]$.

3.7 Definição da Superfície de Escoamento

Objetivando definir a função de escoamento, deve-se recordar e apresentar algumas definições:

1. A parte deviatórica do tensor tensão rotacionado de Kirchhoff, é dada por:

$$\bar{\tau}^D = \bar{\tau} - \frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\tau}) \mathbf{I}; \quad (3.46)$$

2. A tensão efetiva de von Mises em termos da tensão rotacionada de Kirchhoff, é dada por:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\tau}^D : \bar{\tau}^D}; \quad (3.47)$$

3. A pressão, aqui é dada por:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\bar{\tau}). \quad (3.48)$$

Então, de 3.46 e 3.48 pode-se expressar o tensor tensão rotacionado de Kirchhoff como

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}^D - p\mathbf{I} \quad (3.49)$$

ou equivalentemente,

$$\bar{\tau}^D = \bar{\tau} + p\mathbf{I}. \quad (3.50)$$

O trabalho presente considera que a função de escoamento para espumas esmagáveis é definida em termos da medida de tensão de Kirchhoff (ver [37]) e é dado por

$$\mathcal{F}(q, p, \bar{\varepsilon}_k) = \sqrt{q^2 + \alpha(\bar{\varepsilon}_k)^2 (p - p_o(\bar{\varepsilon}_k))^2} - B(\bar{\varepsilon}_k), \quad (3.51)$$

na qual $\alpha = \alpha(\bar{\varepsilon}_k)$ e $p_o = p_o(\bar{\varepsilon}_k)$ são funções das variáveis internas $\bar{\varepsilon}_k$ e o potencial de fluxo é dado por

$$G(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2}. \quad (3.52)$$

em que \mathcal{F} e G podem ser representadas como elipses no plano $p-q$, com $\alpha(\bar{\varepsilon}_k)$ e β representando o formato da elipse para a função de escoamento e para o potencial de fluxo, respectivamente. Note que $p_o(\bar{\varepsilon}_k)$ é o centro da elipse para a função de escoamento, e B é o comprimento vertical ao longo do eixo q da mesma elipse. O potencial de fluxo, por sua vez, é uma elipse centrada na origem. A superfície de escoamento e o potencial de fluxo são apresentados na figura 3.3.

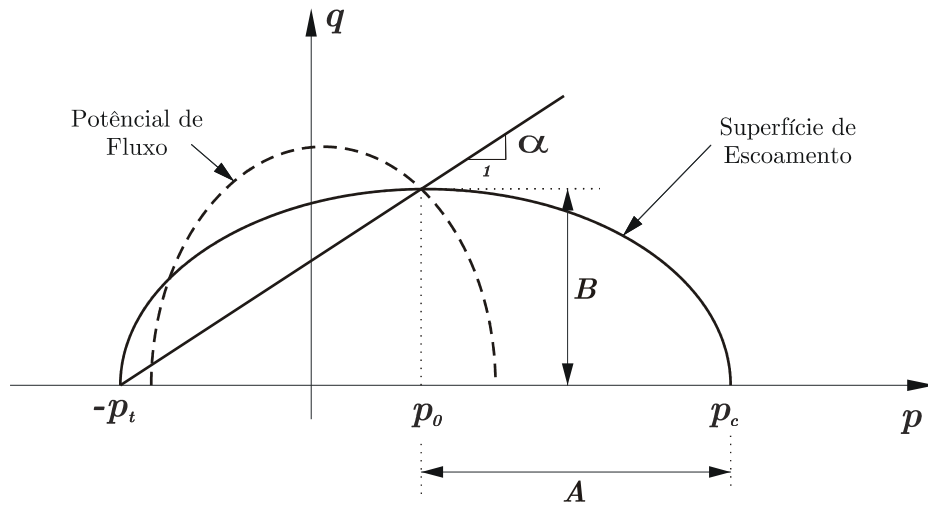


Figura 3.3: Superfície de escoamento e potencial de fluxo

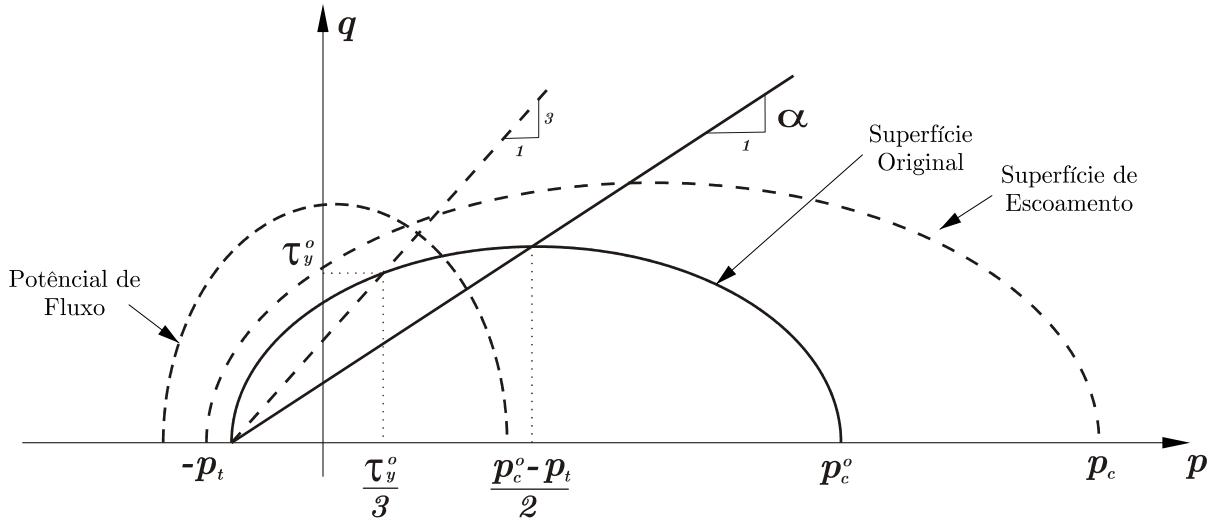


Figura 3.4: Endurecimento volumétrico

Os parâmetros p_o e B da elipse de escoamento estão relacionados com a resistência ao escoamento na compressão hidrostática p_c e para resistência ao escoamento na tração hidrostática p_t por

$$p_o = \frac{p_c - p_t}{2} \quad (3.53)$$

e

$$B = \alpha A \quad (3.54)$$

com

$$A = \frac{p_c + p_t}{2} \quad (3.55)$$

em que p_c e p_t são números positivos e A é o comprimento horizontal no eixo p da elipse de escoamento⁴.

A evolução desta elipse é controlada por uma medida de deformação viscoplástica, $\bar{\varepsilon}_1 \equiv \bar{\varepsilon}_v^{vp}$, que é a deformação viscoplástica volumétrica compressiva, definida como

$$\bar{\varepsilon}_1 \equiv \bar{\varepsilon}_v^{vp} = -\ln(J^{vp}) \quad (3.56)$$

em que

$$J^{vp} = \det(\mathbf{F}^{vp}), \quad (3.57)$$

a qual é usada no modelo de endurecimento volumétrico, e a deformação viscoplástica axial, $\bar{\varepsilon}_2 \equiv \bar{\varepsilon}_a^{vp}$, cuja definição em um teste de compressão unilateral é dada por

$$\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_a^{vp} = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right). \quad (3.58)$$

⁴Razão para tensão de escoamento, $k = \frac{\bar{\tau}_c^0}{p_c^0}$, com $0 < k < 3$

Razão para tensão de escoamento, $k_t = \frac{\bar{\tau}_c^0}{p_c^0} \geq 0$ (5 – 10%)

sendo L^p o comprimento do corpo descarregado, após a carga ter sido aplicada, e L_o o comprimento inicial do corpo (configuração de referência).

Objetivando definir o comportamento do endurecimento, alguns testes experimentais são necessários. Estes testes incluem:

- Ensaio de compressão uniaxial;
- Ensaio de compressão hidrostático;
- Ensaio de dilatação hidrostático.

Estas curvas de endurecimento devem ser avaliadas experimentalmente e dadas como entrada para o modelo. Considera-se que a resistência à tração hidrostática, p_t , seja proporcional à resistência a compressão hidrostática p_c , i.e.

$$p_t = \alpha_p p_c \quad (3.59)$$

para algum valor constante de α_p , $\alpha_p \in [5\%, 10\%]$ (ver [56] e [55]) e denota-se

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{L}}^{vp} &= \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} \\ &\text{com} \\ \bar{\mathbf{L}}^{vp} &= (\mathbf{F}^e) \check{\mathbf{L}}^{vp} (\mathbf{F}^e)^{-1} \\ &\text{e} \\ \bar{\mathbf{D}}^{vp} &= \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{L}}^{vp} + [\bar{\mathbf{L}}^{vp}]^T \right). \end{aligned}$$

Todavia, considera-se que a resistência à compressão hidrostática, p_c , evolua como um produto da compactação (aumento da densidade) ou dilatação (redução da densidade) do material, i.e.

$$p_c = p_c(\bar{\varepsilon}_v^{vp}). \quad (3.60)$$

Considera-se ainda que o parâmetro α é dependente da deformação viscoplástica volumétrica de compactação $\bar{\varepsilon}_v^{vp}$ e também da deformação viscoplástica axial $\bar{\varepsilon}_a^{vp}$, i.e.,

$$\alpha = \alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp}). \quad (3.61)$$

Então, os parâmetros $p_c(\bar{\varepsilon}_v^{vp})$ e $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$ são suficientes para definir o centro e os comprimentos dos semi-eixos maior e menor da elipse de escoamento. Estes parâmetros são variáveis que são funções da deformação viscoplástica volumétrica de compactação $\bar{\varepsilon}_v^{vp}$, que descreve o chamado fenômeno da consolidação, (veja [125]), e também da deformação viscoplástica axial $\bar{\varepsilon}_a^{vp}$. A elipse não translada somente no eixo p , mas também pode se estender no plano de tensões $p - q$, com a consolidação dos poros da espuma sob compressão. As duas variáveis de consolidação (α, p_c) são unicamente determinadas pelos testes experimentais anteriormente mencionados. Logo

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}). \quad (3.62)$$

Exemplos de testes de endurecimento são apresentados nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7 para o teste de compressão uniaxial e nas figuras 3.8 e 3.9, para o teste de compressão hidrostático, veja [125].

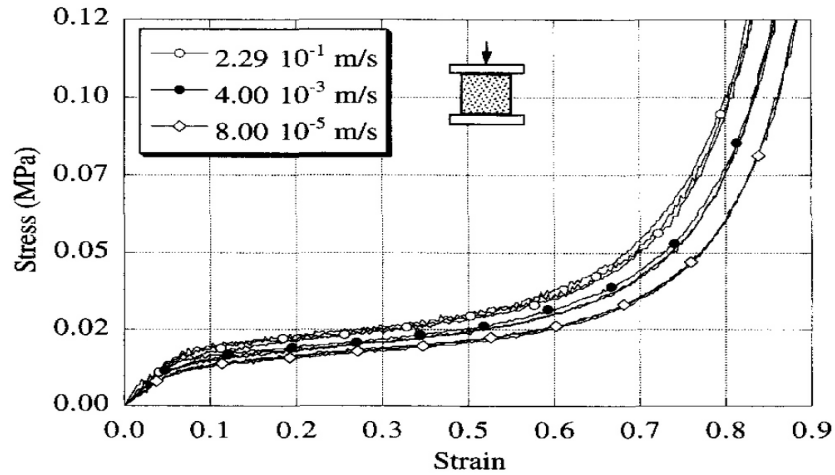


Figura 3.5: Comportamento tensão-deformação da espuma de poliuretano (densidade 6.9 kgm/m³) sob compressão uniaxial ([125])

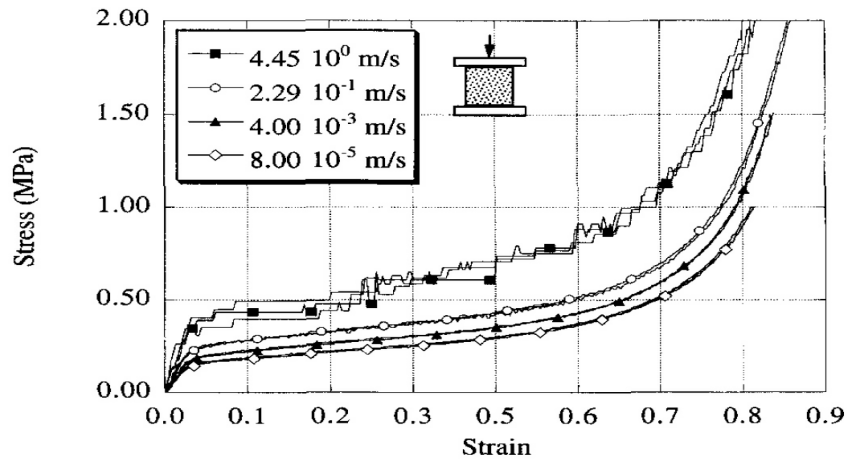


Figura 3.6: Comportamento tensão-deformação da espuma de polipropileno (densidade 4.9 kgm/m³) sob compressão uniaxial ([125])

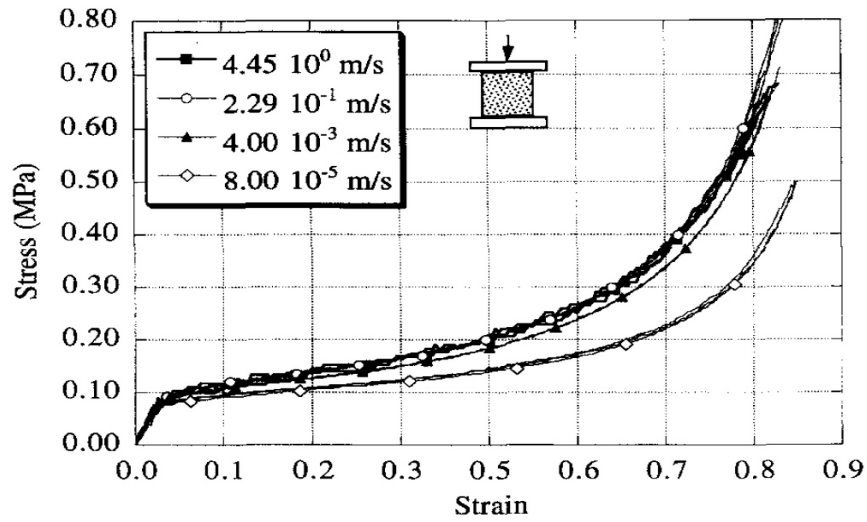


Figura 3.7: Comportamento tensão-deformação da espuma de polipropileno (densidade 1.6 kgm/m³) sob compressão uniaxial ([125])

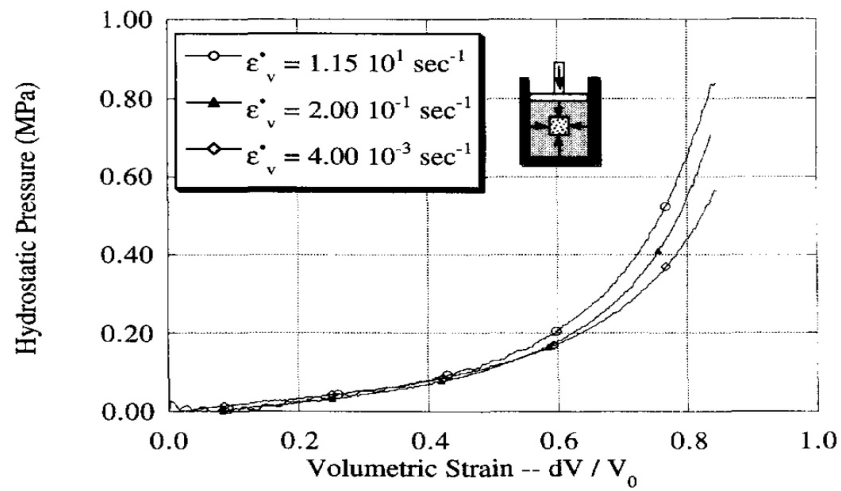


Figura 3.8: Comportamento tensão-deformação da espuma de poliuretano (densidade 6.9 kgm/m³) sob compressão hidrostática ([125])

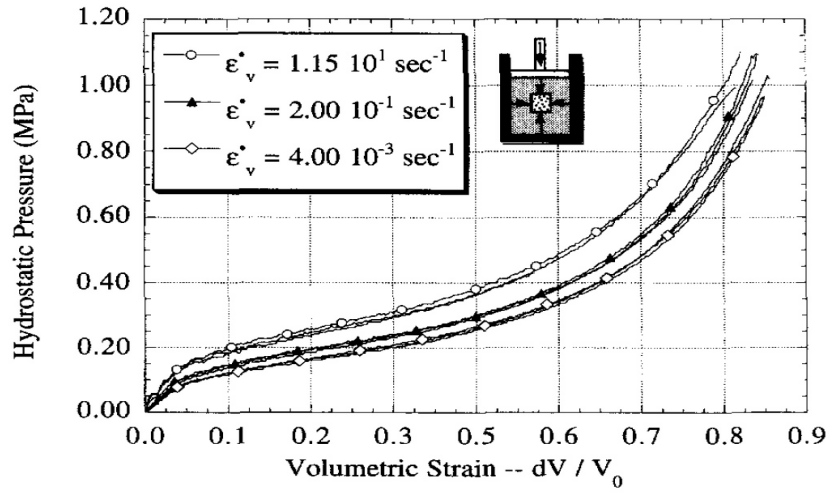


Figura 3.9: Comportamento tensão-deformação da espuma de polipropileno (densidade 4.9 kgm/m³) sob compressão hidrostática ([125])

Neste ponto é importante notar que para determinação de $p_c(\bar{\varepsilon}_v^{vp})$ e $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$ necessita-se de dois testes experimentais independentes. Pode-se calcular diretamente, em associação ao teste de compressão hidrostático, a lei de endurecimento relacionada com a resistência a compressão hidrostática, p_c ,

$$p_c = p_c^o + H_p(\bar{\varepsilon}_v^{vp}) \quad (3.63)$$

em que p_c^o é resistência hidrostática de compressão ao escoamento inicial e $H_p(\bar{\varepsilon}_v^{vp})$ é a lei de endurecimento para compressão hidrostática, dada em termos da deformação volumétrica viscoplástica de compactação $\bar{\varepsilon}_v^{vp}$, mostrada nas figuras 3.8 e 3.9.

Objetivando o cálculo de $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$, necessita-se de um teste experimental independente, neste caso um teste uniaxial de compressão, como mostrado nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7. Todavia, outros testes diferentes podem ser considerados como ilustrado nas figuras 3.10 e 3.11.

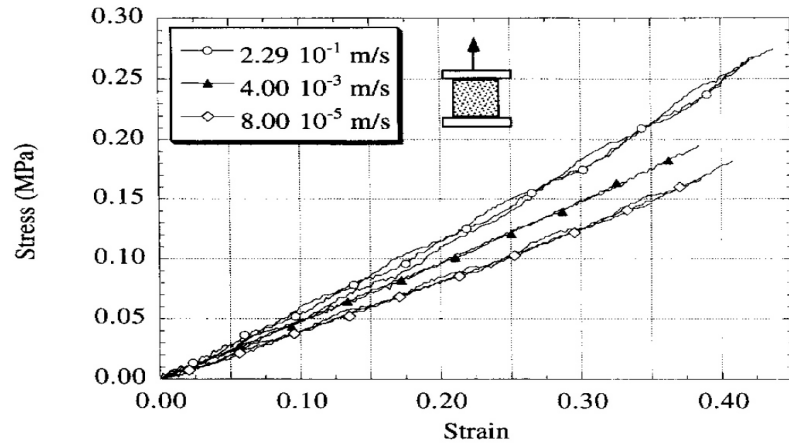


Figura 3.10: Comportamento tensão-deformação da espuma de poliuretano (densidade 6.9 kgm/m³) sob tração uniaxial ([125])

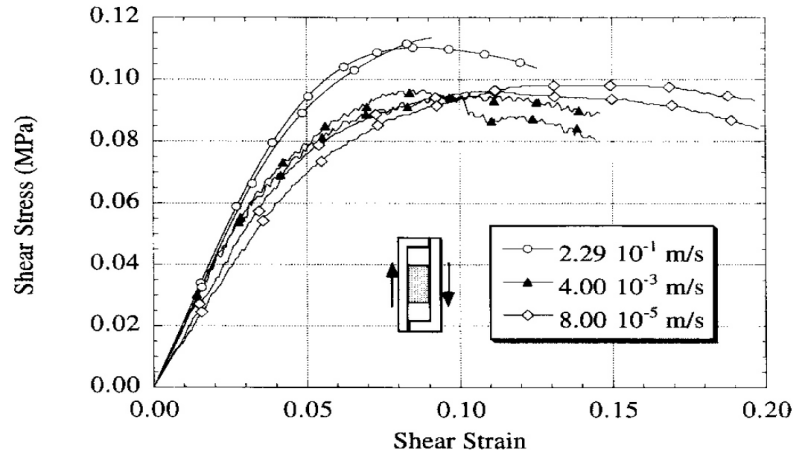


Figura 3.11: Comportamento tensão-deformação da espuma de polistireno (densidade 1.6 kgm/m³) sob cisalhamento simples ([125])

É notório que, se o corpo a ser analisado é submetido a um carregamento trativo, então para se obter uma melhor representação do comportamento do corpo, um teste uniaxial de tração poderia ser recomendado. E por outro lado, se for aplicado um carregamento cisalhante, como ilustrado na figura 3.11, a melhor providência seria usar um teste de cisalhamento para determinar a lei de evolução para $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$. Caso agora se tenha uma solicitação do tipo impacto, o ensaio experimental mais apropriado não seria nem o uniaxial de tração nem o de cisalhamento, seria sim o ensaio uniaxial de compressão para a determinação de $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$.

O ensaio uniaxial de compressão fornece

$$\bar{\tau}_y(\bar{\varepsilon}_a^{vp}) = \bar{\tau}_y^o + H(\bar{\varepsilon}_a^{vp}), \quad (3.64)$$

em que $\bar{\tau}_y^o$ é a tensão de escoamento inicial, $H(\bar{\varepsilon}_a^{vp})$ é a lei de endurecimento e $\bar{\varepsilon}_a^{vp}$ é a medida de deformação viscoplástica axial equivalente. A tensão de escoamento $\bar{\tau}_y$ (medida de tensão

rotacionada de Kirchhoff) está relacionada, no teste uniaxial de compressão, com o primeiro tensor tensão de Piola Kirchhoff. Assim, como mostrado na figura 3.12 a curva de endurecimento é obtida do gráfico de $\bar{\tau}$ versus $\bar{\varepsilon}_a^{vp} = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right)$

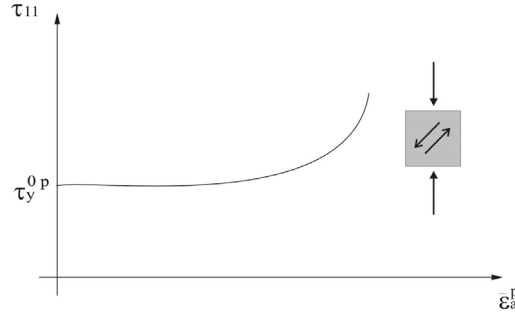


Figura 3.12: Curva de endurecimento obtida do gráfico $\bar{\tau}$ versus $\bar{\varepsilon}_a^{vp} = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right)$.

Note que, como a medida de tensão rotacionada de Kirchhoff está relacionada com o primeiro tensor tensão de Piola Kirchhoff, então P_{11} versus $\bar{\varepsilon}_a^{vp} = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right)$ é mostrado na figura 3.13.

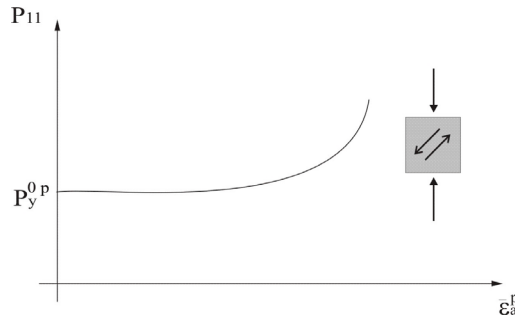


Figura 3.13: P_{11} versus $\bar{\varepsilon}_a^p = -\ln\left(\frac{L^p}{L_o}\right)$

O teste de compressão uniaxial é ilustrado na figura 3.14.

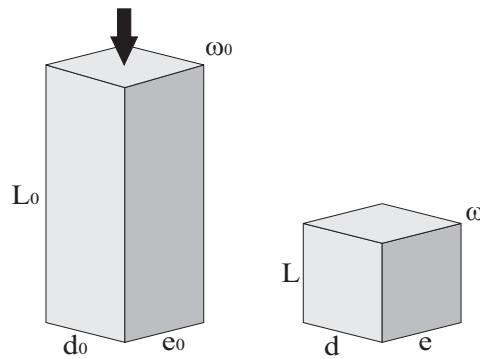


Figura 3.14: Compressão uniaxial

Deste modo a deformação do corpo pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \tilde{\lambda}_1(t) x_{o1}; \\x_2(t) &= \tilde{\lambda}_2(t) x_{o2}; \\x_3(t) &= \tilde{\lambda}_3(t) x_{o3},\end{aligned}$$

com $\tilde{\lambda}_1(t) < 1$, representando a compressão no eixo x_1 , $\tilde{\lambda}_2(t) > 1$, representando a elongação no eixo x_2 , e $\tilde{\lambda}_3(t) > 1$, representando a elongação no eixo x_3 . Sob as considerações de isotropia, tem-se

$$\tilde{\lambda}_2(t) = \tilde{\lambda}_3(t).$$

A função de deformação homogênea pode ser escrita como

$$\mathbf{x} = [\mathbf{F}(t)] \mathbf{x}_o$$

em que

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_2(t) \end{bmatrix}.$$

Agora, pela aplicação de deformações homogêneas para o ensaio uniaxial, tem-se

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_1 &= \frac{L}{L_o}; \\ \tilde{\lambda}_2 &= \frac{d}{d_o}; \\ \tilde{\lambda}_2 &= \frac{e}{e_o}.\end{aligned}$$

Então, $\tilde{\lambda}_i$ representa taxa de estiramento na direção do eixo x_i .

Obsevação 12 *A taxa de estiramento $\tilde{\lambda}$ é uma medida fundamental de deformação na abordagem de deformações finitas. Todavia, conforme já comentado, no teste de compressão uniaxial pode-se definir a deformação uniaxial logarítmica como*

$$\varepsilon_{axial} = -\ln\left(\frac{L}{L_o}\right)$$

e a deformação volumétrica dada por

$$\varepsilon_{vol} = -\ln(J)$$

com $J = \det[F] = \tilde{\lambda}_1 \left(\tilde{\lambda}_2\right)^2$.

Agora, a deformação total pode ser decomposta multiplicativamente em uma parte elástica e uma parte viscoplástica, i.e.,

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{F}^e(t)] [\mathbf{F}^{vp}(t)],$$

assim

$$\mathbf{F}^e(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^e(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^e(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_2^e(t) \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{F}^{vp}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^{vp}(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^{vp}(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_2^{vp}(t) \end{bmatrix}$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(t) &= \tilde{\lambda}_1^e(t) \tilde{\lambda}_1^{vp}(t); \\ \tilde{\lambda}_2(t) &= \tilde{\lambda}_2^e(t) \tilde{\lambda}_2^{vp}(t). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \varepsilon_{axial} &= -\ln\left(\frac{L}{L_o}\right); \\ &= -\ln\left(\tilde{\lambda}_1\right); \\ &= -\ln\left(\tilde{\lambda}_1^e \tilde{\lambda}_1^{vp}\right); \\ &= -\left[\ln\left(\tilde{\lambda}_1^e\right) + \ln\left(\tilde{\lambda}_1^{vp}\right)\right] \end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{vol} &= -\ln(J); \\ &= -\ln\left(\tilde{\lambda}_1 \left(\tilde{\lambda}_2\right)^2\right); \\ &= -\ln\left(\tilde{\lambda}_1\right) + 2\ln\left(\tilde{\lambda}_2\right); \\ &= -\left\{\ln\left(\tilde{\lambda}_1^e\right) + \ln\left(\tilde{\lambda}_1^{vp}\right) + 2\left[\ln\left(\tilde{\lambda}_2^e\right) + \ln\left(\tilde{\lambda}_2^{vp}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Agora, do teste axial tem-se: $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ e

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -\tau_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para $\tau_a > 0$. A pressão p e a parte deviatórica do tensor tensão $\boldsymbol{\tau}^D$ é dada por

$$p = -\frac{1}{3}tr[\boldsymbol{\tau}] = \frac{1}{3}\tau_a$$

e

$$\boldsymbol{\tau}^D = \boldsymbol{\tau} + p\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\tau_a & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\tau_a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\tau_a \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 q &= \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau}^D : \boldsymbol{\tau}^D}; \\
 &= \left\{ \frac{3}{2} \left[\frac{4}{9} \tau_a^2 + \frac{1}{9} \tau_a^2 + \frac{1}{9} \tau_a^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}; \\
 &= \{ \tau_a^2 \}^{\frac{1}{2}}; \\
 &= \tau_a.
 \end{aligned}$$

Então,

$$(p, q) = \tau_a \left(\frac{1}{3}, 1 \right)$$

descreve a direção do carregamento no teste de compressão uniaxial, no plano $p - q$, como mostrado na figura 3.4, em que $\tau_a \in [0, \tau_y]$.

Agora, como

$$\mathbf{F}^e(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^e(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^e(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_2^e(t) \end{bmatrix}$$

pode-se escrever a decomposição polar

$$\mathbf{F}^e(t) = [\mathbf{R}^e(t)] [\mathbf{U}^e(t)].$$

Como verificado no primeiro capítulo deste trabalho a decomposição anterior é única, e note que $\mathbf{F}^e(t)$ é diagonal, assim é fácil ver que

$$\mathbf{R}^e(t) = \mathbf{I}$$

e

$$\mathbf{U}^e(t) = \mathbf{F}^e(t).$$

Resulta daí que,

$$\mathbf{U}^e(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^e(t) & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^e(t) & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_2^e(t) \end{bmatrix}$$

o que permite escrever

$$\mathbf{E}^e = \ln(\mathbf{U}^e) = \begin{bmatrix} \ln(\tilde{\lambda}_1^e(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\tilde{\lambda}_2^e(t)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\tilde{\lambda}_2^e(t)) \end{bmatrix}.$$

Analogamente à definição acima, pode-se definir o tensor de deformação plástica logarítmico como

$$\mathbf{E}^{vp} = \begin{bmatrix} \ln(\tilde{\lambda}_1^{vp}(t)) & 0 & 0 \\ 0 & \ln(\tilde{\lambda}_2^{vp}(t)) & 0 \\ 0 & 0 & \ln(\tilde{\lambda}_2^{vp}(t)) \end{bmatrix}$$

o que leva a escrever

$$\dot{\mathbf{E}}^{vp} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_1^{vp}}{\tilde{\lambda}_1^{vp}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_2^{vp}}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_2^{vp}}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} \end{bmatrix}.$$

De fato, considerando-se a definição

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}^{vp} &= (\mathbf{F}^e) \check{\mathbf{D}}^{vp} (\mathbf{F}^e)^{-1}; \\ &= (\mathbf{F}^e) \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}. \end{aligned}$$

Neste caso, $\check{\mathbf{D}}^{vp} = \check{\mathbf{L}}^{vp}$ logo

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1^e & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}_2^e & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\lambda}_2^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_1^{vp}}{\tilde{\lambda}_1^{vp}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_2^{vp}}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_2^{vp}}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^{vp}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\tilde{\lambda}_1^e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda}_2^e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tilde{\lambda}_2^e} \end{bmatrix}$$

i.e.

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_1^{vp}}{\tilde{\lambda}_1^{vp}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_2^{vp}}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\tilde{\lambda}}_2^{vp}}{\tilde{\lambda}_2^{vp}} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{E}}^{vp},$$

donde pode-se concluir que de fato $\bar{\mathbf{D}}^{vp}$ pode ser definido com uma taxa de deformação viscoplástica.

3.8 O Potencial de Fluxo

A taxa de deformação plástica para o modelo de endurecimento volumétrico é assumido ser⁵

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (3.65)$$

⁵ $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$; $\dot{\mathbf{F}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{L}\mathbf{F}$; $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$

Note que $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}$, então $\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1}$ e $\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{vp} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^{vp}$ assim:

$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = (\dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{vp} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^{vp}) (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e (\mathbf{F}^e)^{-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^{vp} (\mathbf{F}^{vp})^{-1} (\mathbf{F}^e)^{-1} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^{vp}$.

complementado com o postulado da nulidade da vorticidade viscoplástica, compatível com a isotropia plástica, i.e.,

$$\bar{\mathbf{W}}^{vp} = \mathbf{0}. \quad (3.66)$$

Aqui, $\dot{\lambda}$ é o multiplicador viscoplástico, o qual deve satisfazer $\dot{\lambda} \geq 0$. A evolução da deformação viscoplástica é dada por

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = \check{\mathbf{D}}^{vp} \mathbf{F}^{vp}. \quad (3.67)$$

O potencial viscoplástico para este modelo é dado por

$$G(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2} \quad (3.68)$$

em que β está relacionado com o coeficiente de Poisson plástico ν_p da forma seguinte

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1 - 2\nu_p}{1 + \nu_p}}. \quad (3.69)$$

De fato note que para o cálculo de β considera-se a definição do coeficiente de Poisson plástico dado por

$$\nu_p = - \frac{\bar{\mathbf{D}}_{33}^{vp}}{\bar{\mathbf{D}}_{11}^{vp}}$$

o qual considera que a direção de carregamento do teste uniaxial de compressão ocorre ao longo do eixo x_1 , e

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}$$

com

$$G(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2}.$$

Como resultado, tem-se

$$\nu_p = - \frac{\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{33}}}{\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{11}}}.$$

Agora, supondo que β não depende das componentes da tensão, deriva-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(q, p)}{\partial \bar{\tau}_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \{q^2 + \beta^2 p^2\}^{\frac{1}{2}}; \\ &= \frac{1}{2} \{q^2 + \beta^2 p^2\}^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \{q^2 + \beta^2 p^2\}; \\ &= \frac{1}{G(q, p)} \left\{ q \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{ij}} + \beta^2 p \frac{\partial p}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \right\}. \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial \bar{\tau}_{kk}}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ki} \delta_{kj} = -\frac{1}{3} \delta_{ij}$$

e

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{rs}^D} \frac{\partial \bar{\tau}_{rs}^D}{\partial \bar{\tau}_{ij}}.$$

Porém

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{rs}^D} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{rs}^D} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{lm}^D \bar{\tau}_{lm}^D \right\}^{\frac{1}{2}}; \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{lm}^D \bar{\tau}_{lm}^D \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{3}{2} 2 \bar{\tau}_{lm}^D \delta_{lr} \delta_{ms}; \\
 &= \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{lm}^D \delta_{lr} \delta_{ms}; \\
 &= \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{rs}^D
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\tau}_{rs}^D}{\partial \bar{\tau}_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_{ij}} \left\{ \bar{\tau}_{rs} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{kk} \delta_{rs} \right\}; \\
 &= \delta_{ri} \delta_{sj} - \frac{1}{3} \delta_{ki} \delta_{kj} \delta_{rs}; \\
 &= \delta_{ri} \delta_{sj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs}.
 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados acima, obtem-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial q}{\partial \bar{\tau}_{ij}} &= \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{rs}^D \left(\delta_{ri} \delta_{sj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{rs} \right); \\
 &= \frac{3}{2q} \bar{\tau}_{ij}^D.
 \end{aligned}$$

Então

$$\frac{\partial G(q, p)}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = \frac{1}{G(q, p)} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{ij}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \delta_{ij} \right\}.$$

Consequentemente,

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{11}} = \frac{1}{G} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{11}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}$$

e

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{33}} = \frac{1}{G} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{33}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}.$$

Logo

$$\nu_p = - \frac{\left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{33}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}}{\left\{ \frac{3}{2} \bar{\tau}_{11}^D - \frac{1}{3} \beta^2 p \right\}}.$$

Note que, no teste de compressão uniaxial,

$$\bar{\tau}_{33}^D = \bar{\tau}_{22}^D$$

em que

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

assim $\bar{\tau}_{11} < 0$, e desde que $\bar{\tau}_{rs}^D = \bar{\tau}_{rs} - \frac{1}{3}\bar{\tau}_{kk}\delta_{rs}$,

$$\bar{\tau}^D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\bar{\tau}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11} \end{bmatrix}.$$

Também,

$$p = -\frac{1}{3}tr(\bar{\tau}) = -\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11}.$$

Então, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \nu_p &= -\frac{\{\frac{3}{2}\bar{\tau}_{33}^D - \frac{1}{3}\beta^2 p\}}{\{\frac{3}{2}\bar{\tau}_{11}^D - \frac{1}{3}\beta^2 p\}}, \\ &= -\frac{\{\frac{3}{2}(-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11}) - \frac{1}{3}\beta^2(-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11})\}}{\{\frac{3}{2}(\frac{2}{3}\bar{\tau}_{11}) - \frac{1}{3}\beta^2(-\frac{1}{3}\bar{\tau}_{11})\}}, \\ &= -\frac{\{-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\beta^2\}}{\{1 + \frac{1}{9}\beta^2\}}, \end{aligned}$$

i.e.,

$$\nu_p \left[1 + \frac{1}{9}\beta^2\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{9}\beta^2\right] = 0,$$

o que fornece

$$\begin{aligned} \frac{1}{9}[1 + \nu_p]\beta^2 &= \frac{1}{2} - \frac{2}{9}\nu_p, \\ &= \frac{1}{2}[1 - 2\nu_p]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\beta^2 = \frac{9}{2} \frac{[1 - 2\nu_p]}{[1 + \nu_p]},$$

donde tem-se

$$\beta = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[1 - 2\nu_p]}{[1 + \nu_p]}}.$$

Todavia, como β deve ser positivo para G ser convexo, finalmente tem-se

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[1 - 2\nu_p]}{[1 + \nu_p]}}.$$

O coeficiente de Poisson plástico, que é a razão entre as deformações plásticas transversal e longitudinal sob compressão uniaxial, deve ser um dado de entrada, e deve estar na faixa de -1 a 0.5 , i.e., $\nu_p \in [-1, 0.5]$. O limite superior, $\nu_p = 0.5$, corresponde ao escoamento viscoplástico incompressível. Para espumas poliméricas, considera-se

$$\nu_p = 0.0 \tag{3.70}$$

o que permite escrever

$$\beta = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad (3.71)$$

De fato note que, supondo a incompressibilidade

$$dx_o dy_o dz_o = dx dy dz. \quad (3.72)$$

Considerando as deformações

$$\epsilon_x = \ln\left(\frac{dx}{dx_o}\right); \quad \epsilon_y = \ln\left(\frac{dy}{dy_o}\right); \quad \epsilon_z = \ln\left(\frac{dz}{dz_o}\right), \quad (3.73)$$

tem-se

$$\begin{aligned} dx &= dx_o e^{\epsilon_x}; \\ dy &= dy_o e^{\epsilon_y}; \\ dz &= dz_o e^{\epsilon_z}. \end{aligned} \quad (3.74a)$$

Logo

$$(dx_o dy_o dz_o) = (dx dy dz) e^{(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)}; \quad (3.75)$$

$$\therefore e^{(\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)} = 1; \quad (3.76)$$

$$\therefore \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 0; \quad (3.77)$$

$$\therefore \epsilon_y = \epsilon_z = -\nu_p \epsilon_x. \quad (3.78)$$

Substituindo os resultados da eq.3.78 em eq.3.77, obtem-se

$$\epsilon_x - 2\nu_p \epsilon_x = 0; \quad (3.79)$$

$$\therefore \nu_p = \frac{1}{2} \quad (3.80)$$

Note que $J = \det(\mathbf{F}) = \frac{dV}{dV_o} = \frac{\rho_o}{\rho} = \sqrt{III\mathbf{C}}$ com $\rho_o dV_o = \rho dV$. No modelo plástico J_2 isocórico o escoamento viscoplástico é incompressível, consequentemente $J^{vp} = \det(\mathbf{F}^{vp}) = \frac{\rho_o}{\rho^{vp}} = 1$.

Supondo o não conhecimento do coeficiente de Poisson plástico, a consideração $\nu_p = 0.0$ é razoável, como comentado na literatura e mostrado na figura 3.15

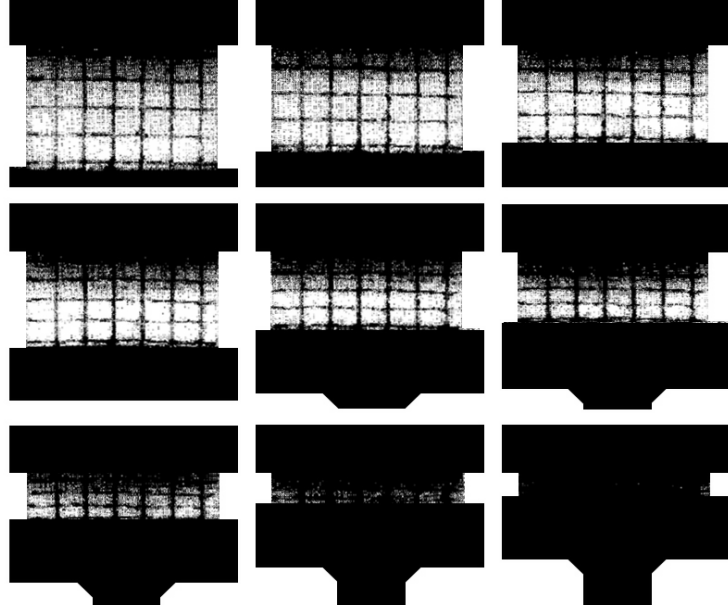


Figura 3.15: Ensaio de compressão uniaxial. [125]

3.8.1 A Determinação de $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$

As definições anteriores permitem concluir que para completar a definição do modelo, deve-se ter o conhecimento das duas leis de endurecimento:

1. A lei de endurecimento volumétrica, $H_p(\bar{\varepsilon}_v^{vp})$;
2. A lei de endurecimento para compressão uniaxial, $H(\bar{\varepsilon}_a^{vp})$.

Lembre-se que a compressão hidrostática já foi utilizada para determinar a evolução de p_c , então resta agora fazer uso do teste de compressão uniaxial. Assim o coeficiente de Poisson plástico para um material isotrópico pode ser apresentado, em um teste de compressão uniaxial, da forma seguinte

$$\nu_p = -\frac{\mathbf{E}_{22}^{vp}}{\mathbf{E}_{11}^{vp}} = -\frac{\dot{\mathbf{E}}_{22}^{vp}}{\dot{\mathbf{E}}_{11}^{vp}} = -\frac{\bar{\mathbf{D}}_{22}^{vp}}{\bar{\mathbf{D}}_{11}^{vp}}.$$

Logo a deformação volumétrica viscoplástica, é escrita como

$$\bar{\varepsilon}_v^{vp} = -\ln(J^{vp})$$

com

$$J^{vp} = \det[\mathbf{F}^{vp}],$$

e pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_v^{vp} &= -\ln\left(\tilde{\lambda}_1^p \left(\tilde{\lambda}_2^p\right)^2\right); \\ &= -\left\{\ln\left(\tilde{\lambda}_1^p\right) + 2\ln\left(\tilde{\lambda}_2^p\right)\right\}. \end{aligned}$$

Mas, da definição do coeficiente de Poisson plástico, tem-se

$$\nu_p = -\frac{\ln(\lambda_2^p)}{\ln(\lambda_1^p)},$$

i.e.

$$\ln(\lambda_2^p) = -\nu_p \ln(\lambda_1^p).$$

Consequentemente

$$\bar{\varepsilon}_v^{vp} = -(1 - 2\nu_p) \ln(\lambda_1^p),$$

o que permite escrever

$$\bar{\varepsilon}_v^{vp} = (1 - 2\nu_p) \bar{\varepsilon}_a^{vp}$$

ou

$$\bar{\varepsilon}_a^{vp} = \frac{\bar{\varepsilon}_v^{vp}}{(1 - 2\nu_p)},$$

que é um resultado válido para o teste uniaxial de tração ou compressão. Oriundo deste raciocínio, a lei de endurecimento pode ser escrita como $H(\bar{\varepsilon}_a^{vp}) = H(\frac{\bar{\varepsilon}_v^{vp}}{1-2\nu_p}) = \tilde{H}(\bar{\varepsilon}_v^{vp})$. Deste modo, objetivando a determinação de $\alpha(\bar{\varepsilon}_v^{vp}, \bar{\varepsilon}_a^{vp})$ considera-se que o material esteja escoando em um teste de compressão uniaxial, assim

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_a &= \bar{\tau}_y(\bar{\varepsilon}_a^{vp}); \\ &= \bar{\tau}_y^o + H(\bar{\varepsilon}_a^{vp}), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) = \sqrt{q^2 + \alpha^2(p - p_o)^2} - B = 0,$$

e que por sua vez equivale a

$$q^2 + \alpha^2(p - p_o)^2 = B^2.$$

Todavia, como $B = \alpha A$, $p_o = \frac{p_c - p_t^o}{2}$ e $A = \frac{p_c + p_t^o}{2}$, tem-se

$$q^2 + \alpha^2(p - p_o)^2 = \alpha^2 A^2$$

e consequentemente

$$\alpha^2 = \frac{q^2}{A^2 - (p - p_o)^2},$$

i.e.

$$\alpha = \pm \frac{q}{\left\{A^2 - (p - p_o)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Relembrando que α deve ser positivo, escreve-se

$$\alpha = \frac{q}{\left\{A^2 - (p - p_o)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

No caso particular de um ensaio de compressão unidimensional, tem-se $p = \frac{1}{3}\bar{\tau}_a = \frac{1}{3}\bar{\tau}_y$ e $q = \bar{\tau}_a = \bar{\tau}_y$, então:

$$\begin{aligned}
 A^2 - (p - p_o)^2 &= \frac{1}{4} (p_c + p_t)^2 - \left(\frac{1}{3}\bar{\tau}_y - \frac{1}{2} (p_c - p_t) \right)^2; \\
 &= \frac{1}{4} (p_c + p_t)^2 - \left\{ \frac{1}{9}\bar{\tau}_y^2 - \frac{1}{3}\bar{\tau}_y (p_c - p_t) + \frac{1}{4} (p_c - p_t)^2 \right\}; \\
 &= -\frac{1}{9}\bar{\tau}_y^2 + \frac{1}{3}\bar{\tau}_y (p_c - p_t) + \frac{1}{4} \left\{ (p_c + p_t)^2 - (p_c - p_t)^2 \right\}; \\
 &= -\frac{1}{9}\bar{\tau}_y^2 + \frac{1}{3}\bar{\tau}_y (p_c - p_t) + p_c p_t; \\
 &= p_c p_t + \frac{1}{3}\bar{\tau}_y (p_c - p_t) - \frac{1}{9}\bar{\tau}_y^2,
 \end{aligned}$$

o que permite escrever

$$\alpha = \frac{\bar{\tau}_y}{\left\{ p_t p_c - \frac{1}{3}\bar{\tau}_y (p_t - p_c) - \frac{1}{9}\bar{\tau}_y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

em que

$$\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y^o + H (\bar{\varepsilon}_a^{vp}) = \bar{\tau}_y^o + \tilde{H} (\bar{\varepsilon}_v^{vp}).$$

$$p_c = p_c^o + H_p (\bar{\varepsilon}_v^{vp})$$

e

$$p_t = \alpha_p p_c, \text{ para algum } \alpha_p \text{ constante.}$$

3.9 A Densidade Relativa (ρ^*)

Almejando fornecer uma melhor visão da formulação aqui abordada para a fase elástica, pode-se neste ponto introduzir a equação constitutiva, dada por

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{D} \mathbf{E}^e,$$

em que

$$\mathbf{E}^e = \ln (\mathbf{U}^e) = \frac{1}{2} \ln (\mathbf{C}^e)$$

com $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ denotando o tensor tensão rotacionado de Kirchhoff

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = [\mathbf{R}^e]^T [\boldsymbol{\tau}] [\mathbf{R}^e]$$

e $\boldsymbol{\tau}$ representando o tensor tensão de Kirchhoff

$$\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$$

e

$$J = \det [\mathbf{F}]$$

em que σ denota o tensor tensão de Cauchy. A equação constitutiva acima deve ser modificada visando incluir o efeito da densidade relativa, conforme já comentado em capítulo anterior. Assim, a equação da continuidade, dada por

$$\rho_o = \det [\mathbf{F}] \rho$$

com $\rho_o = \rho_o(\mathbf{x}_o)$ denotando a densidade inicial, definida na configuração de referência e $\rho = \rho(\mathbf{x}_o, t)$ a densidade atual, definida na configuração de referência. Dividindo a equação anterior pela densidade do material totalmente compacto (polímero) ρ_M , escreve-se

$$\rho_o^* = \det [\mathbf{F}] \rho^*,$$

em que

$$\rho_o^* = \frac{\rho_o}{\rho_M}$$

e

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_M}.$$

Assim, tem-se $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\rho^*)$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbb{D}(\rho^*) \mathbf{E}^e$$

em que

$$\mathbb{D}(\rho^*) = 2\mu(\rho^*) \mathbb{I} + \left(\kappa(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})$$

sendo $\mathbb{D}(\rho^*)$ um tensor de quarta ordem, \mathbb{I} o tensor identidade de quarta ordem, \mathbf{I} o tensor identidade de segunda ordem, $\kappa(\rho^*)$ o módulo volumétrico e $\mu(\rho^*)$ o coeficiente de Lamé ou o módulo de cisalhamento, $\mu(\rho^*) = G(\rho^*) = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Então,

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2\mu(\rho^*) \mathbf{E}^e + \left(\kappa(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}.$$

Esta última equação pode ser reescrita como

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = 2G(\rho^*) \mathbf{E}^e + K(\rho^*) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}.$$

em que $K(\rho^*) = \left(\kappa(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right)$.

Aqui, considera-se que

$$\nu(\rho^*) = \nu_0 = cte$$

e

$$\begin{aligned} E(\rho^*) &= (\rho^*)^{-\gamma} E_M; \\ &= \frac{E_M}{(\rho^*)^\gamma} \end{aligned}$$

com ν_0 representando o coeficiente de Poisson do material completamente denso e E_M ⁶ o módulo de Young do material completamente denso. Então, ν_0 , E_M e γ devem ser identificados por testes experimentais. A hipótese de $\nu(\rho^*)$ ser independente da densidade relativa é observada experimentalmente (maiores detalhes veja [89] e [88]) e desta maneira a dependência da densidade relativa ρ^* fica fortemente associada ao módulo de Young. Segundo a literatura especializada, comparações precisas entre os resultados teóricos e experimentais são dificultadas por imprecisões envolvendo a estimativa das propriedades E_M e ρ_M . Tem-se da literatura que o módulo de Young tem variações de apenas 2% para $0 < \nu_0 < 0.5$ indicando que todos os valores têm uma validade razoável para todos os valores dos coeficientes de Poisson, e assim destas observações, pode-se escrever

$$\bar{\tau} = 2\mu(\rho^*) \mathbf{E}^e + \left(\kappa(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}$$

em que

$$\mu(\rho^*) = \frac{E(\rho^*)}{2(1 + \nu_0)}$$

e

$$\kappa(\rho^*) = \frac{E(\rho^*)}{3(1 - 2\nu_0)},$$

com

$$E(\rho^*) = c(\rho^*)^\gamma E_M.$$

Neste ponto, é importante notar que

$$\rho^* \in (0, 1]$$

e que, o processo físico deve satisfazer

$$\det[\mathbf{F}] > 0.$$

Todavia, como

$$\det[\mathbf{F}] = \frac{\rho_o^*}{\rho^*}$$

pode-se notar que $0 < \rho^* \rightarrow \det[\mathbf{F}] = \frac{\rho_o^*}{\rho^*} > 0$. Logo, o conjunto de densidades fisicamente admissíveis é dado por

$$\mathcal{K}_\rho = \{\rho^* \mid 0 < \rho^* \leq 1\}.$$

Objetivando impor fisicamente estas restrições, se reescreve-se o módulo de Young como

$$E(\rho^*) = [c(\rho^*)^\gamma + I_{\mathcal{K}}(\rho^*)] E_M$$

em que $I_{\mathcal{K}}(\rho^*)$ representa uma espécie de *função característica* do conjunto \mathcal{K}_ρ , i.e.,

$$I_{\mathcal{K}}(\rho^*) = \begin{cases} 0, & \text{se } \rho^* \in \mathcal{K}_\rho; \\ +\infty, & \text{se } \rho^* \notin \mathcal{K}_\rho. \end{cases}$$

⁶ $E_M = \frac{9\kappa_M\mu_M}{3\kappa_M + \mu_M}$

Esta expressão é regularizada pelo uso de uma abordagem via penalidade interior e exterior, i.e., considera uma aproximação diferenciável $\Psi_{\bar{\eta}}(\rho^*)$ tal que

$$\lim_{\bar{\eta} \rightarrow 0} \{\Psi_{\bar{\eta}}(\rho^*)\} = I_{\mathcal{K}}(\rho^*).$$

O objetivo é construir $\Psi_{\bar{\eta}}(\rho^*)$ que represente o domínio factível, \mathcal{K}_{ρ} , pelas inequações restritivas:

$$\begin{aligned}\tilde{g}_1(\rho^*) &= -\rho^* < 0; \\ \tilde{g}_2(\rho^*) &= \rho^* - 1 \leq 0.\end{aligned}$$

A função regularizada $\Psi_{\bar{\eta}}(\rho^*)$ pode ser escrita como

$$\Psi_{\bar{\eta}}(\rho^*) = \bar{\eta} \tilde{P}_1(\tilde{g}_1(\rho^*)) + \frac{1}{\bar{\eta}} \tilde{P}_2(\tilde{g}_2(\rho^*))$$

sendo

$$\tilde{P}_1(\tilde{g}_1(\rho^*)) = -\frac{1}{\tilde{g}_1(\rho^*)}$$

e

$$\tilde{P}_2(\tilde{g}_2(\rho^*)) = (\langle \rho^* - 1 \rangle^+)^2.$$

Desta forma, $\tilde{P}_1(\tilde{g}_1(\rho^*))$ representa uma penalidade do tipo interior e $\tilde{P}_2(\tilde{g}_2(\rho^*))$ representa uma penalidade do tipo exterior, tais que estas representam no limite a função $I_{\mathcal{K}}(\rho^*)$ de \mathcal{K}_{ρ} . Seguindo as idéias dispostas anteriormente, pode-se considerar a seguinte expressão para o módulo de Young:

$$E(\rho^*) = \left\{ c(\rho^*)^{\gamma} + \bar{\eta} P_1(g_1(\rho^*)) + \frac{1}{\bar{\eta}} P_2(g_2(\rho^*)) \right\} E_M$$

ou

$$E(\rho^*) = \left\{ c(\rho^*)^{\gamma} + \bar{\eta} \frac{1}{\rho^*} + \frac{1}{\bar{\eta}} (\langle \rho^* - 1 \rangle^+)^2 \right\} E_M,$$

em que, $\bar{\eta}$ é o parâmetro de penalidade (assumindo valores da ordem de 10^{-5}).

3.10 Leis de Evolução para a Deformação Viscoplastica Acumulada ($\bar{\epsilon}^{vp}$)

Os modelos para materiais viscoplasticos caracterizam-se matematicamente pelo fato do multiplicador viscoplastico $\dot{\lambda}$ ser calculado através da solução de uma equação constitutiva de evolução. Há várias leis de evolução propostas na literatura (ver [105], [106], [108] e [109]), dentre os quais pode-se destacar:

1. • A Lei de Norton

$$\dot{\bar{\epsilon}}^{vp} = \left(\frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\epsilon}_v^{vp})}{K'_v} \right)^N \quad (3.81)$$

em que $\mathcal{F}(q, p, A_k)$ representa a função de escoamento $\dot{\bar{\epsilon}}^{vp}$ a taxa da deformação

viscoplástica acumulada, dada por

$$\begin{aligned}\dot{\bar{e}}^{vp} &= \left\{ \frac{2}{3} \bar{\mathbf{D}}^{vp} : \bar{\mathbf{D}}^{vp} \right\}^{\frac{1}{2}}; \\ &= \dot{\lambda} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (3.82)$$

(com $\dot{\lambda} \geq 0$), i.e.

$$\dot{\lambda} = \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp})}{K'_v} \right)^N. \quad (3.83)$$

Em que também tem-se a condição

$$\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) = \sigma^v \geq 0$$

com σ^v denotando a sobretensão

$$\sigma^v = K'_v \left(\dot{\bar{e}}^{vp} \right)^{\frac{1}{N}}.$$

- Lei de Benallal

$$\dot{\bar{e}}^{vp} = \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right] \quad (3.84)$$

com

$$\dot{\bar{e}}^{vp} = \left\{ \frac{2}{3} \bar{\mathbf{D}}^{vp} : \bar{\mathbf{D}}^{vp} \right\}^{\frac{1}{2}} = \dot{\lambda} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

logo

$$\dot{\lambda} = \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right].$$

A condição

$$\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) = \sigma^v \geq 0$$

é representada via a sobretensão σ^v dada por

$$\sigma^v = K_v \left[1 - \exp \left(-\frac{\dot{\bar{e}}^{vp}}{M} \right) \right].$$

Pode-se observar o efeito da saturação do endurecimento devido a deformação total aplicada e ao aumento da taxa de deformação viscoplástica acumulada. Note que

$$\frac{\sigma^v(\dot{\mathbf{F}})}{K_v} = 1 - \exp \left(\frac{-\dot{\bar{e}}^{vp}}{M} \right)$$

i.e.

$$\exp\left(\frac{-\dot{\bar{e}}^{vp}}{M}\right) = 1 - \frac{\sigma^v(\dot{\mathbf{F}})}{K_v}$$

logo

$$\dot{\bar{e}}^{vp} = -M \ln \left[1 - \frac{\sigma^v(\dot{\mathbf{F}})}{K_v} \right],$$

então

$$\dot{\bar{e}}^{vp} = \ln \left[\left(1 - \frac{\sigma^v(\dot{\mathbf{F}})}{K_v} \right)^{-M} \right].$$

Note que o modelo elastoviscoplastico tem a seguinte característica

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) < 0 &\rightarrow \text{comportamento elástico} \\ &\text{e} \\ \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) \geq 0 &\rightarrow \text{comportamento viscoplastico} \end{aligned}$$

A taxa de deformação viscoplastica é dada por

$$\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}$$

em que

$$\dot{\lambda} \geq 0$$

e

$$\dot{\lambda} = \mathfrak{F}(\cdot).$$

Então, no modelo elastoviscoplastico, a lei de evolução para a taxa do multiplicador viscoplastico $\dot{\lambda}$ deve ser fornecida. Consequentemente, para $\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) < 0$ tem-se $\dot{\lambda} = 0$, e desta maneira pode-se citar os seguintes modelos:

Norton:

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp})}{K'_v} \right)^N, & \text{se } \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) \geq 0; \\ 0, & \text{se } \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) < 0, \end{cases}$$

em que K'_v e N são parâmetros do material para o modelo;

Benallal:

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right], & \text{se } \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) \geq 0; \\ 0, & \text{se } \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) < 0, \end{cases}$$

em que K_v e M são parâmetros do material para o modelo.

Os modelos anteriores estão aptos a reproduzir os fenômenos básicos de fluência e a dependência do comportamento do material em relação à taxa de deformação. Porém, devido a uma maior versatilidade, o modelo de Benallal foi o escolhido para o desenvolvimento deste trabalho. As relações anteriores permitem escrever o seguinte sumário de procedimentos:

1. Decomposição do gradiente da função deformação:
 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}$.
2. Equações de estado:
 $\bar{\tau} = 2\mu(\rho^*) \mathbf{E}^e + K(\rho^*) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}$
em que
 $\mathbf{E}^e = \frac{1}{2} \ln[\mathbf{C}^e], \quad \mathbf{C}^e = (\mathbf{F}^e)^T \mathbf{F}^e$.
3. Função de escoamento
 $\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) = \sqrt{q^2 + \alpha^2 \left(p - \left[\frac{p_c - p_t}{2}\right]\right)^2} - \alpha \left[\frac{p_c + p_t}{2}\right]$
na qual
 $p = -\frac{1}{3} \text{tr}[\bar{\tau}], \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\tau}^D : \bar{\tau}^D}, \quad \bar{\tau}^D = \bar{\tau} + p \mathbf{I} \quad \text{e}$
 $\alpha = \frac{\bar{\tau}_y}{\left\{p_t p_c - \frac{1}{3} \bar{\tau}_y (p_t - p_c) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_y^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$
com $\bar{\tau}_y$, p_c e p_t definidos na lei de endurecimento.
4. Lei de escoamento viscoplástico
 $\bar{\mathbf{D}}^{vp} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \quad \text{com} \quad \dot{\mathbf{F}}^{vp} = \check{\mathbf{D}}^{vp} \mathbf{F}^{vp}, \quad \bar{\mathbf{D}}^{vp} = (\mathbf{U}^e) \check{\mathbf{D}}^{vp} (\mathbf{U}^e)^{-1}$
em que
 $G(q, p) = \sqrt{q^2 + \beta^2 p^2}$
com
 $\beta = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-2\nu_p}{1+\nu_p}};$
e para o modelo de Benallal, tem-se

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right], & \text{se } \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) \geq 0; \\ 0, & \text{se } \mathcal{F}(p, q, \bar{\varepsilon}_v^{vp}) < 0 \end{cases}$$

em que K_v e M são parâmetros do material para o modelo
5. Leis de endurecimento
 $\bar{\tau}_y = \bar{\tau}_y^o + H \left(\frac{\bar{\varepsilon}_v^{vp}}{(1-2\nu_p)} \right);$
 $p_c = p_c^o + H_p(\bar{\varepsilon}_v^{vp}) \quad \text{com} \quad \bar{\varepsilon}_v^{vp} = -\ln(J^{vp}) \quad \text{e} \quad J^{vp} = \det[\mathbf{F}^{vp}];$
e
 $p_t = \alpha_p p_c$ para alguma constante α_p .

3.11 O Problema de Valor Inicial

O foco básico, neste tópico, é o problema elastoviscoplástico de valor inicial para o gradiente da deformação viscoplástica \mathbf{F}^{vp} , definido no intervalo de tempo $t \in [t_n, t_{n+1}]$ e partindo da condição inicial:

$$\mathbf{F}^{vp}(t_n) = \mathbf{F}_n^{vp}.$$

O problema está sujeito à história do gradiente de deformação $\mathbf{F}(t)$, $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Então o problema de valor inicial da deformação viscoplástica consiste em determinar \mathbf{F}^{vp} tal que as equações constitutivas (e leis de endurecimento) acima sejam satisfeitas para $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

3.11.1 A Aproximação via *Operator Split*

O uso da metodologia de aproximação baseada na decomposição de operadores, *operator split method*, tem se mostrado muito conveniente em aplicações semelhantes às deste trabalho. A abordagem via *operator split* resulta em um algoritmo que consiste em duas etapas básicas:

1. Predição elástica: o problema é considerado como puramente elástico entre t_n e t_{n+1} ;
2. Correção viscoplástica: um sistema de equações discretas considerando
 - a lei da elasticidade finita;
 - o fluxo viscoplástico;
 - a evolução das variáveis internas;
 - o critério de carregamento/descarregamento.

Tal sistema é resolvido tomando os resultados do estágio de predição elástica como condições iniciais.

3.11.2 O Prognóstico Elástico

Nesta etapa, tem-se

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = \mathbf{0}.$$

Então, a solução deste problema puramente elástico, o estado *elástico teste*, é obtida como

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp^{teste}} = \mathbf{F}_n^{vp}.$$

O correspondente gradiente de deformação elástico teste é ⁷

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1} \quad (\text{veja fig. 3.16})$$

⁷"Strain-driven problem", ie, $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}$. Para cada k -ésima iteração, o incremento de \mathbf{u}_{n+1}^k o que se tem é um gradiente de deformação \mathbf{F}_{n+1}^k . Assim diz-se que o problema é regido pela deformação.

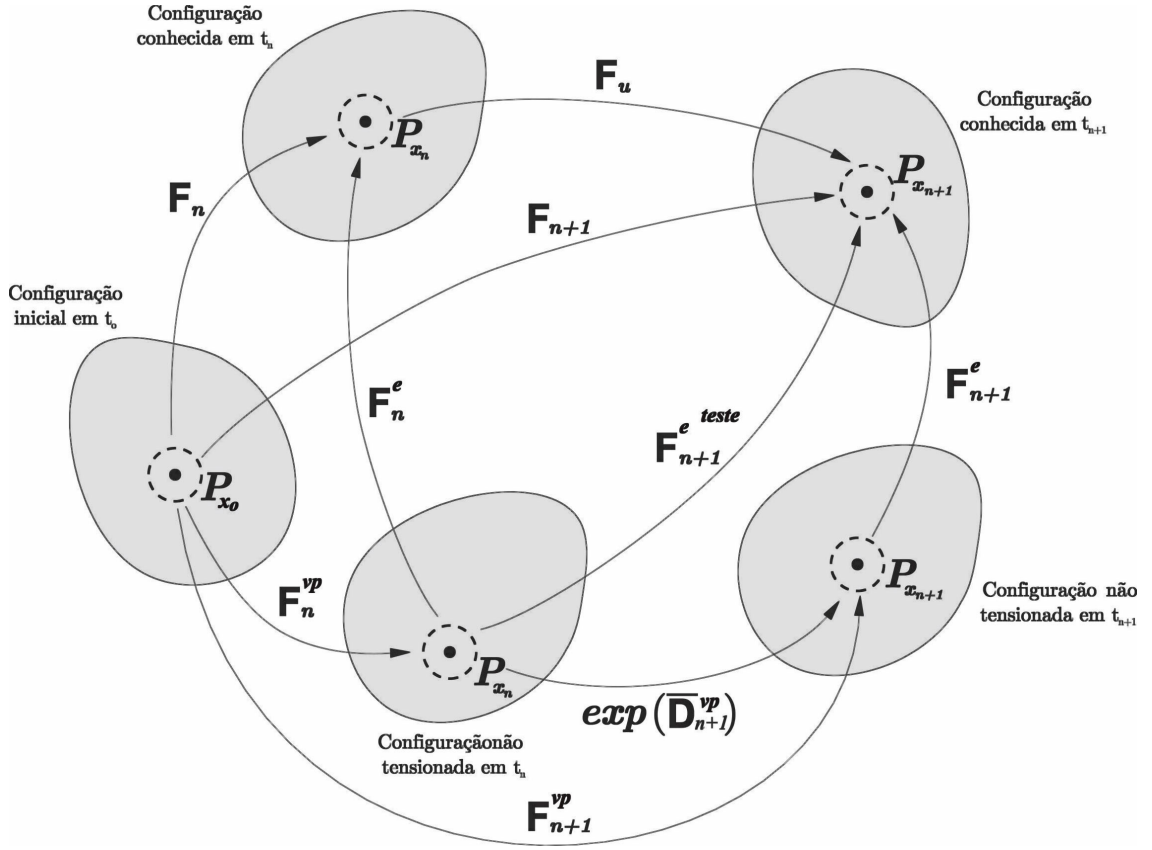


Figura 3.16: Espaço de configurações.

e a densidade relativa ρ_{n+1}^* é dada por

$$\rho_{n+1}^* = \frac{\rho_o^*}{\det[\mathbf{F}_{n+1}]}.$$

Devido à lei elástica ser definida em termos da medida de deformação logarítmica \mathbf{E}^e , determina-se

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e teste} = \left(\mathbf{F}_{n+1}^{e teste} \right)^T \mathbf{F}_{n+1}^{e teste},$$

e então a medida elástica de deformação logarítmica teste é calculada por

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e teste} = \frac{1}{2} \ln \left(\mathbf{C}_{n+1}^{e teste} \right).$$

O correspondente tensor tensão rotacionado de Kirchhoff $\bar{\tau}$ teste, é dado da por

$$\bar{\tau}_{n+1}^{teste} = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e teste} + \left(\kappa(\rho_{n+1}^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho_{n+1}^*) \right) \text{tr} \left(\mathbf{E}_{n+1}^{e teste} \right) \mathbf{I}.$$

Tomando o traço da equação anterior, tem-se

$$\text{tr} [\bar{\tau}_{n+1}^{teste}] = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \text{tr} [\mathbf{E}_{n+1}^{e teste}] + 3 \left(\kappa(\rho_{n+1}^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho_{n+1}^*) \right) \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e teste})$$

i.e.

$$\begin{aligned} \text{tr} [\bar{\tau}_{n+1}^{teste}] &= 2\mu(\rho_{n+1}^*) \text{tr} [\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}] + (3\kappa(\rho_{n+1}^*) - 2\mu(\rho_{n+1}^*)) \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}); \\ &= 3\kappa(\rho_{n+1}^*) \text{tr} [\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}]. \end{aligned}$$

Todavia

$$\bar{\tau}_{n+1}^{teste} = \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - p_{n+1}^{teste} \mathbf{I}$$

i.e.

$$\bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} = \bar{\tau}_{n+1}^{teste} + p_{n+1}^{teste} \mathbf{I}$$

em que

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{teste} &= -\frac{1}{3} \text{tr} [\bar{\tau}_{n+1}^{teste}]; \\ q_{n+1}^{teste} &= \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} : \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} p_{n+1}^{teste} &= -\frac{1}{3} \text{tr} [\bar{\tau}_{n+1}^{teste}] \\ &= -\kappa(\rho_{n+1}^*) \text{tr} [\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}] \end{aligned}$$

i.e.

$$p_{n+1}^{teste} = -\kappa(\rho_{n+1}^*) \text{tr} [\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}]. \quad (3.85)$$

Retornando a equação constitutiva

$$\bar{\tau}_{n+1}^{teste} = 2\mu \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}) \mathbf{I}$$

obtem-se

$$\bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} - p_{n+1}^{teste} \mathbf{I} = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \left(\kappa(\rho_{n+1}^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho_{n+1}^*) \right) \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}) \mathbf{I}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} &= -\kappa(\rho_{n+1}^*) \text{tr} [\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}] \mathbf{I} + 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} + \left(\kappa(\rho_{n+1}^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho_{n+1}^*) \right) \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}) \mathbf{I}; \\ &= 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} - \frac{2}{3}\mu(\rho_{n+1}^*) \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}) \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Porém

$$\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{E}_{n+1}^{D^{teste}} + \frac{1}{3} \text{tr} (\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}}) \mathbf{I} \quad (3.86)$$

o que permite escrever

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} &= 2\mu(\rho_{n+1}^*) \left\{ \mathbf{E}_{n+1}^{e^{D^{teste}}} + \frac{1}{3} \text{tr} \left(\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \mathbf{I} \right\} - \frac{2}{3} \mu(\rho_{n+1}^*) \text{tr} \left(\mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} \right) \mathbf{I}; \\ &= 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e^{D^{teste}}}.\end{aligned}$$

Logo

$$\bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} = 2\mu(\rho_{n+1}^*) \mathbf{E}_{n+1}^{e^{D^{teste}}}, \quad (3.87)$$

e

$$q_{n+1}^{teste} = \sqrt{\frac{3}{2} \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}} : \bar{\tau}_{n+1}^{D^{teste}}}.$$

Lembre-se que

$$\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp^{teste}} = -\ln \left(J_{n+1}^{vp^{teste}} \right) = \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp}$$

com

$$J_{n+1}^{vp^{teste}} = \det \left[\mathbf{F}_{n+1}^{vp^{teste}} \right] = \det \left[\mathbf{F}_n^{vp} \right];$$

e

$$\bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste} = \bar{\tau}_y^o + H \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp^{teste}}}{(1 - 2\nu_p)} \right);$$

$$p_{c_{n+1}}^{teste} = p_c^o + H_p \left(\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp^{teste}} \right);$$

$$p_{t_{n+1}}^{teste} = \alpha_p p_{c_{n+1}}^{teste}.$$

Assim

$$\alpha_{n+1}^{teste} = \frac{\bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste}}{\left\{ p_{t_{n+1}}^{teste} p_{c_{n+1}}^{teste} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste} \left(p_{t_{n+1}}^{teste} - p_{c_{n+1}}^{teste} \right) - \frac{1}{9} \left(\bar{\tau}_{y_{n+1}}^{teste} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

o que permite a determinação da função de escoamento

$$\mathcal{F}_{n+1}^{teste} = \sqrt{\left(q_{n+1}^{teste} \right)^2 + \left(\alpha_{n+1}^{teste} \right)^2 \left(p_{n+1}^{teste} - \left[\frac{p_{c_{n+1}}^{teste} - p_{t_{n+1}}^{teste}}{2} \right] \right)^2} - \left(\alpha_{n+1}^{teste} \right) \left[\frac{p_{c_{n+1}}^{teste} + p_{t_{n+1}}^{teste}}{2} \right]. \quad (3.88)$$

3.11.3 O Corretor Viscoplastico

O corretor viscoplastico é um procedimento que corresponde à classe dos chamados algoritmos para mapeamentos de retorno (*return mapping algorithms*) que foram extensivamente explorados nos trabalhos [98], [99], [100], [101], [102] entre outros. Todavia, diferentemente dos trabalhos envolvendo as hipóteses de pequenas deformações, que comumente aplicam o método implícito de Euler, para solução do problema de valor inicial elastoviscoplastico, neste trabalho usou-se a aproximação exponencial implícita. Através da decomposição multiplicativa ($\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{vp}$) e da aproximação exponencial implícita, pode-se determinar um algoritmo para mapeamento de retorno que mantenha a mesma forma geral do usado em pequenas deformações viscoplasticas.

Tabela 3.1: Verificação do critério de escoamento

<p>Se $(\mathcal{F}_{n+1}^{teste} < 0)$ então</p> <p>o passo $[t_n, t_{n+1}]$ é inteiramente elástico então o estado em t_{n+1} é atualizado como:</p> <p>$(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$ que implica, por exemplo, que</p> <p>$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \mathbf{F}_{n+1}^{vp^{teste}} = \mathbf{F}_n^{vp}$</p> <p>e</p> <p>$\bar{\tau}_{n+1} = \bar{\tau}_{n+1}^{teste}$</p> <p>senão $(\mathcal{F}_{n+1}^{teste} \geq 0)$</p> <p>o passo $[t_n, t_{n+1}]$ é elastoviscoplastico;</p> <p>Vá para o estágio do corretor viscoplastico.</p> <p>fim Se.</p>

O corretor viscoplastico é baseado na lei de escoamento viscoplastica

$$\dot{\mathbf{F}}^{vp} = \check{\mathbf{D}}^{vp} \mathbf{F}^{vp},$$

a qual é aproximada pelo método exponencial implícito de Euler, com \mathbf{F}_n^{vp} como condição inicial e $\check{\mathbf{D}}^{vp} = (\mathbf{U}^e)^{-1} \bar{\mathbf{D}}^{vp} (\mathbf{U}^e)$ (*unstressed configuration*). Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1}^{vp} &= \exp \left((\mathbf{U}^e) \Delta \lambda \left. \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} (\mathbf{U}^e)^{-1} \right) \mathbf{F}_n^{vp} \\ &= \exp \left(\Delta \lambda \left. \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^{vp} \end{aligned}$$

em que o incremento do multiplicador viscoplastico é estritamente positivo, i.e., $\Delta \lambda > 0$. Note que $\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}}$, $(\mathbf{U}^e)^{-1}$ e \mathbf{U}^e devido à hipótese de isotropia têm os mesmos autovetores, logo comutam entre si.

A discretização acima é complementada pela integração da lei de evolução do multiplicador viscoplastico, aproximado pelo método de Euler, resultando em

$$\Delta \lambda = \frac{\ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \varepsilon_{v_{n+1}}^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right]}{\left\{ \frac{2}{3} \left. \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \cdot \left. \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \right|_{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}}} \Delta t.$$

Mapeamento Exponencial

Seguindo as hipóteses isotrópicas, o procedimento para atualização do tensor tensão pode ser escrito na mesma forma que o mapeamento de retorno para a elastoviscoplasticidade infinitesi-

mal, com todas as operações relacionadas a grandes deformações, restritas ao nível cinemático. De fato, pode-se mostrar que

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^{vp} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} - \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1}$$

então⁸

$$(\mathbf{F}_{n+1}^{vp})^{-1} = (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1} \left[\exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right]^{-1}.$$

Agora, como $[\exp(\mathbf{X})]^{-1} = \exp(-\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X}$ (tensor de segunda ordem), temos

$$(\mathbf{F}_{n+1}^{vp})^{-1} = (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1} \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right).$$

Multiplicando à esquerda de ambas as expressões por \mathbf{F}_{n+1} e lembrando-se que $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^e \mathbf{F}_{n+1}^{vp}$, tem-se:

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1} \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right)$$

em que

$$\mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_{n+1}^{vp})^{-1} = \mathbf{F}_{n+1}^e.$$

Todavia, como

$$\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} = \mathbf{F}_{n+1} (\mathbf{F}_n^{vp})^{-1}$$

pode-se escrever

$$\mathbf{F}_{n+1}^e = \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right). \quad (3.89)$$

Porém,

$$(\mathbf{F}_{n+1}^e)^T = \left[\exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right]^T (\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}})^T.$$

Adicionalmente, podemos notar que $\frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1}$ ⁹ é simétrico. Logo $\exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right)$ também o é. Logo,

$$(\mathbf{F}_{n+1}^e)^T = \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) (\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}})^T. \quad (3.90)$$

Multiplicando à esquerda a eq.3.89 pela eq.3.90, pode-se escrever

$$(\mathbf{F}_{n+1}^e)^T \mathbf{F}_{n+1}^e = \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) (\mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}})^T \mathbf{F}_{n+1}^{e^{teste}} \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right)$$

⁸ $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$

$(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{I}$

$(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1}$

$\mathbf{AIA}^{-1} = \mathbf{I}$

⁹ $\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{ij}} = \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{ji}}$, como $\bar{\tau}_{ij} = \bar{\tau}_{ji}$, logo $\frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \in Sym$

o que resulta em

$$\mathbf{C}_{n+1}^e = \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} \exp \left(-\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right).$$

Porém, devido à isotropia elástica, \mathbf{U}^e e $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ comutam e também \mathbf{C}^e , $\ln(\mathbf{U}^e)$ e $\ln(\mathbf{C}^e)$ (estes têm os mesmos autovetores).

Desta forma, isolando $\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}}$ na equação anterior derivamos

$$\mathbf{C}_{n+1}^{e^{teste}} = \exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{C}_{n+1}^e \exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right).$$

Assim, o algoritmo para o mapeamento de retorno consiste na solução de um conjunto de equações não lineares compostas por

$$\mathbf{E}_{n+1}^e = \mathbf{E}_{n+1}^{e^{teste}} - \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1}; \quad (3.91)$$

$$\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^{vp}, \quad (3.92)$$

e também pela solução incremental da integração da lei de evolução do multiplicador viscoplástico

$$\Delta\lambda \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right] \Delta t = 0. \quad (3.93)$$

Agora, como $\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^{vp}$, pode-se calcular $\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}$ por

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} &= -\ln(\det[\mathbf{F}_{n+1}^{vp}]); \\ &= -\ln \left(\det \left[\exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^{vp} \right] \right); \\ &= -\ln \left(\det \left[\exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right] \det[\mathbf{F}_n^{vp}] \right); \\ &= -\ln \left(\det \left[\exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right] \right) - \ln(\det[\mathbf{F}_n^{vp}]); \\ \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} &= \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} - \ln \left(\det \left[\exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Neste ponto fez-se uso das seguintes propriedades:

i)

$$\det(\exp[\mathbf{X}]) = \exp(\text{tr}[\mathbf{X}]),$$

logo

$$\text{tr}[\mathbf{X}] = 0 \Leftrightarrow \det(\exp[\mathbf{X}]) = 1;$$

ii)

$$\exp [\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1}] = \mathbf{A} \exp [\mathbf{X}] \mathbf{A}^{-1};$$

iii)

$$\exp [-\mathbf{X}] = \{\exp [\mathbf{X}]\}^{-1};$$

iv)

$$\ln (\exp [\mathbf{X}]) = \mathbf{X};$$

v) Se \mathbf{A} e \mathcal{A} comutam, i.e., se $\mathbf{A}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathbf{A}$, então

$$\begin{aligned} \exp [\mathbf{A} + \mathcal{A}] &= \exp [\mathbf{A}] \exp [\mathcal{A}]; \\ &= \exp [\mathcal{A}] \exp [\mathbf{A}]; \end{aligned}$$

vi)

$$\det [\mathbf{A}\mathcal{A}] = \det [\mathbf{A}] \det [\mathcal{A}];$$

vii) Sejam x e y números reais. i.e. $x, y \in \mathbb{R}$. Então

$$\ln [x y] = \ln [x] + \ln [y].$$

Os resultados acima permitem escrever

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} &= \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} - \ln \left(\exp \left[tr \left(\Delta \lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right] \right); \\ &= \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} - tr \left[\Delta \lambda \left(\frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right) \right]; \\ &= \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} - \Delta \lambda \ tr \left[\frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right]. \end{aligned}$$

A equação de evolução do multiplicador viscoplástico é obtida pela aplicação do método implícito

de Euler, i.e.,

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta\lambda}{G_{n+1}} \left\{ q_{n+1}^2 + \frac{2}{9}\beta^4 p_{n+1}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + M \ln \left[1 - \frac{\mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})}{K_\nu} \right] \Delta t = 0 \\
& \text{em que} \\
& G_{n+1} = \sqrt{q_{n+1}^2 + \beta^2 p_{n+1}^2}; \\
& \mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}) = \sqrt{q_{n+1}^2 + \alpha_{n+1}^2 \left(p_{n+1} - \left[\frac{p_{c_{n+1}} - p_{t_{n+1}}}{2} \right] \right)^2} - \alpha_{n+1} \left[\frac{p_{c_{n+1}} + p_{t_{n+1}}}{2} \right]; \\
& \text{e} \\
& \alpha_{n+1} = \frac{\bar{\tau}_{y_{n+1}}}{\left\{ p_{t_{n+1}} p_{c_{n+1}} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{y_{n+1}} (p_{t_{n+1}} - p_{c_{n+1}}) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_{y_{n+1}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \\
& \text{com} \\
& \bar{\tau}_{y_{n+1}} = \bar{\tau}_y^o + H \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}}{(1-2\nu_p)} \right); \\
& p_{c_{n+1}} = p_c^o + H_p \left(\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} \right) \\
& \text{e} \\
& p_{t_{n+1}} = \alpha_p p_{c_{n+1}} \text{ para alguma constante } \alpha_p.
\end{aligned}$$

3.11.4 Formulação do Mapeamento de Retorno Viscoplastico

O problema do corretor viscoplastico pode ser formulado como: Determine $(\mathbf{E}_{n+1}^e, \Delta\lambda, \alpha_{n+1}, \bar{\tau}_{y_{n+1}}, p_{c_{n+1}}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})$ solução de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e_{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} = \mathbf{0}; \\ \Delta\lambda \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right] \Delta t = 0; \\ \left\{ p_{t_{n+1}} p_{c_{n+1}} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{y_{n+1}} (p_{t_{n+1}} - p_{c_{n+1}}) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_{y_{n+1}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \alpha_{n+1} - \bar{\tau}_{y_{n+1}} = 0; \\ \bar{\tau}_{y_{n+1}} - \bar{\tau}_y^o - H \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}}{(1-2\nu_p)} \right) = 0; \\ p_{c_{n+1}} - p_c^o - H_p \left(\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} \right) = 0; \\ \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} - \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} + \Delta\lambda \operatorname{tr} \left[\frac{\partial G}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} \Big|_{n+1} \right] = 0. \end{array} \right. \quad (3.94)$$

Assim tem-se que:

- Dado \mathbf{F}_{n+1} , ler \mathbf{F}_n^{vp} e calcular: $\mathcal{F}(q_{n+1}^{teste}, p_{n+1}^{teste}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp_{teste}})$;
- Checar a existência de escoamento viscoplastico:

se $\left(\mathcal{F}(q_{n+1}^{teste}, p_{n+1}^{teste}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp_{teste}}) < 0 \right)$ então
o passo é elástico;
logo $(\cdot)_{n+1} = (\cdot)_{n+1}^{teste}$

senão

passo elastoviscoplastico;

resolva o sistema de equações não lineares (sistema local) para $(\mathbf{E}_{n+1}^e, \Delta\lambda, \alpha_{n+1}, \bar{\tau}_{y_{n+1}}, p_{c_{n+1}}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{n+1}^e - \mathbf{E}_{n+1}^{e_{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} = \mathbf{0}; \\ \Delta\lambda \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right] \Delta t = 0; \\ \left\{ p_{t_{n+1}} p_{c_{n+1}} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{y_{n+1}} (p_{t_{n+1}} - p_{c_{n+1}}) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_{y_{n+1}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \alpha_{n+1} - \bar{\tau}_{y_{n+1}} = 0; \\ \bar{\tau}_{y_{n+1}} - \bar{\tau}_y^o - H \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}}{(1-2\nu_p)} \right) = 0; \\ p_{c_{n+1}} - p_c^o - H_p \left(\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} \right) = 0; \\ \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} - \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} + \Delta\lambda \operatorname{tr} \left[\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right] = 0. \end{array} \right.$$

fim se;

- Calcular $\mathbf{F}_{n+1}^{vp} = \exp \left(\Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right) \mathbf{F}_n^{vp}$ e armazenar \mathbf{F}_{n+1}^{vp} e $\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}$.

3.12 O Sistema Local

O passo elastoviscoplastico consiste na solução do sistema de equações seguinte para $(\mathbf{E}_{n+1}^e, \Delta\lambda, \alpha_{n+1}, \bar{\tau}_{y_{n+1}}, p_{c_{n+1}}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = E_{11_{n+1}}^e - E_{11_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{11}} \Big|_{n+1} = 0; \\ R_2 = E_{22_{n+1}}^e - E_{22_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{22}} \Big|_{n+1} = 0; \\ R_3 = E_{12_{n+1}}^e - E_{12_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{12}} \Big|_{n+1} = 0; \\ R_4 = E_{33_{n+1}}^e - E_{33_{n+1}}^{e_{teste}} + \Delta\lambda \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}_{33}} \Big|_{n+1} = 0; \\ R_5 = \Delta\lambda \left\{ \frac{2}{3} \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right\}^{\frac{1}{2}} - \ln \left[\left(1 - \frac{\mathcal{F}(p_{n+1}, q_{n+1}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp})}{K_v} \right)^{-M} \right] \Delta t = 0; \\ R_6 = \left\{ p_{t_{n+1}} p_{c_{n+1}} - \frac{1}{3} \bar{\tau}_{y_{n+1}} (p_{t_{n+1}} - p_{c_{n+1}}) - \frac{1}{9} \bar{\tau}_{y_{n+1}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \alpha_{n+1} - \bar{\tau}_{y_{n+1}} = 0; \\ R_7 = \bar{\tau}_{y_{n+1}} - \bar{\tau}_y^o - H \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp}}{(1-2\nu_p)} \right) = 0; \\ R_8 = p_{c_{n+1}} - p_c^o - H_p \left(\bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} \right) = 0; \\ R_9 = \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp} - \bar{\varepsilon}_{v_n}^{vp} + \Delta\lambda \operatorname{tr} \left[\frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \Big|_{n+1} \right] = 0. \end{array} \right. \quad (3.95)$$

A solução deste sistema não linear é feita pelo método de Newton, que pode ser descrito como: Dada uma estimativa inicial, $\bar{\mathbf{r}}_{n+1}^{(0)} = (\mathbf{E}_{n+1}^{e(0)}, \Delta\lambda^{(0)}, \alpha_{n+1}^{(0)}, \bar{\tau}_{y_{n+1}}^{(0)}, p_{c_{n+1}}^{(0)}, \bar{\varepsilon}_{v_{n+1}}^{vp(0)})$, determine $\bar{\mathbf{r}}_{n+1}^{(*)}$ que seja solução do sistema linear para o i -ésimo passo

$$\left[\mathbb{K} \left(\bar{\mathbf{r}}_{n+1}^{(i)} \right) \right] \left\{ \Delta \bar{\mathbf{r}}_{n+1}^{(i)} \right\} = -\bar{\mathbf{R}} \left(\bar{\mathbf{r}}_{n+1}^{(i)} \right); \quad (3.96)$$

em que \vec{R} é definido em 3.95. Assim

$$\vec{r}_{n+1}^{(i+1)} = \vec{r}_{n+1}^{(i)} + \Delta \vec{r}_{n+1}^{(i)}$$

em que¹⁰

$$[\mathbb{K}(\vec{r})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_1}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_1}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_1}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_1}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_1}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_1}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_2}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_2}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_2}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_2}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_2}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_2}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_2}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_3}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_3}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_3}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_3}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_3}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_3}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_3}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_4}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_4}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_4}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_4}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_4}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_4}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_4}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_4}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_4}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_5}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_5}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_5}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_5}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_5}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_5}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_5}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_5}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_5}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_6}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_6}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_6}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_6}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_6}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_6}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_6}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_6}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_6}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_7}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_7}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_7}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_7}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_7}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_7}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_7}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_7}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_7}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_8}{\partial} & \frac{\partial R_8}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_8}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_8}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_8}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_8}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_8}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_8}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_8}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \\ \frac{\partial R_9}{\partial E_{11n+1}^e} & \frac{\partial R_9}{\partial E_{22n+1}^e} & \frac{\partial R_9}{\partial E_{12n+1}^e} & \frac{\partial R_9}{\partial E_{33n+1}^e} & \frac{\partial R_9}{\partial \Delta \lambda} & \frac{\partial R_9}{\partial \alpha_{n+1}} & \frac{\partial R_9}{\partial \bar{\tau}_{yn+1}} & \frac{\partial R_9}{\partial p_{cn+1}} & \frac{\partial R_9}{\partial \bar{\varepsilon}_{vn+1}^{vp}} \end{bmatrix}$$

ou ainda $[\mathbb{K}(\vec{r})]_{kl} = \frac{\partial R_k}{\partial r_l}$. O algoritmo do Método de Newton está esquematicamente mostrado na tabela de procedimentos 3.2. Detalhes sobre o algoritmo do Método de Newton utilizado neste trabalho podem ser vistos no **Apêndice B**.

3.13 Problema de Valor de Contorno Global

Uma vez definido o modelo constitutivo e a estratégia de atualização das variáveis em t_{n+1} , o que define o chamado problema local, é possível resolver o *problema de valor de contorno global* associado ao deslocamento \mathbf{u} .

A formulação adotada neste trabalho é a *Lagrangeana Total*. Assim, dentro deste enfoque, o problema de valor de contorno, *formulação forte*, e a sua equivalente formulação integral, *formulação fraca*, serão discretizados a seguir.

3.13.1 Conservação do Momento Linear

Note que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_o, t)$ em $\mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u$. A relação entre os vetores normais nas superfícies de referência e atual é dada pela expressão

$$\mathbf{n} dA = \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_0,$$

¹⁰Note que para haver solução \mathbb{K} não pode ser singular. Uma condição suficiente para existência e unicidade de solução é \mathbb{K} ser positiva-definida. Porém esta condição não é necessária, já que o sistema pode ter infinitas soluções. O que é indesejável é que \mathbb{K} tenha autovalor(es) nulo(s), i.e., ela pode ser até indefinida no seguinte sentido: auto-valores exclusivamente positivos e negativos. Isso garante que o operando representado por \mathbb{K} seja bijetivo resultando na existência de um operador inverso o qual será único, resultando na unicidade da solução.

Tabela 3.2: Algoritmo de Newton aplicado ao sistema de equações do algoritmo de mapeamento de retorno

(i) Inicializar o contador de iteração: $i \leftarrow 0$
(ii) Inicializar $\vec{r}_{n+1}^{(0)} = \vec{r}_n$
(iii) Calcular o resíduo $\vec{R}^{(0)} = \vec{R}(\vec{r}_{n+1}^{(0)})$, $erro = \ \vec{R}^{(0)}\ $.
(v) Faça enquanto ($erro > \text{tolerância}$)
(1) Determinar a matriz tangente $\mathbb{K} = \mathbb{K}(\vec{r}_{n+1}^{(i)})$
(2) Resolver o sistema linear para $\Delta\vec{r}_{n+1}^{(i)}$
$\Delta\vec{r}_{n+1}^{(i)} = \mathbb{K}^{-1}\vec{R}^{(i)}$
(3) Atualize os deslocamentos $\vec{r}_{n+1}^{(i+1)}$
$\vec{r}_{n+1}^{(i+1)} = \vec{r}_{n+1}^{(i)} + \Delta\vec{r}_{n+1}^{(i)}$
(5) Computar $erro = \ \vec{R}^{(i+1)}\ $
(6) Atualizar $\vec{R}^{(i)} \leftarrow \vec{R}^{(i+1)}$ e $i \leftarrow i + 1$
Fim Faça enquanto.

em que \mathbf{n}_o é a normal unitária externa à configuração de referência.

Desta forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_0; \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_0; \\ \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega_t &= \rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t) J(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_0. \end{aligned}$$

Como $J(\mathbf{x}_o, t) = \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)]$ tem-se então

$$\rho(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = \rho(\mathbf{x}_o, t) J(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_0 = \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_0$$

em que $\rho_o(\mathbf{x}_o)$ denota a densidade na configuração de referência e $\rho(\mathbf{x}, t)$ a densidade na configuração atual, definida em termos da configuração de referência.

$$\begin{aligned} \rho_o(\mathbf{x}_o) &= \rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, 0), 0) J(\mathbf{x}_o, 0) = \rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, 0), 0); \\ \therefore J(\mathbf{x}_o, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t), t) = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t); \\ \frac{\partial \mathbf{u}_o}{\partial \mathbf{x}_o} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_o}, \end{aligned}$$

logo

$$\nabla \mathbf{u}_o = [\nabla [\mathbf{u} \circ \boldsymbol{\varphi}]] \mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t).$$

A conservação do momento linear é dada por

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{\ddot{x}} d\Omega_t \quad \forall \mathcal{B} \subset \Omega_t. \quad (3.97)$$

Para problemas quase-estáticos, em que o termo $\frac{d}{dt}(\cdot)$ é negligenciado, temos

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = 0 \quad \forall \mathcal{B} \subset \Omega_t. \quad (3.98)$$

Entretanto

$$\int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = \int_{\mathcal{B}_o} \rho(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) \mathbf{b}(\varphi(\mathbf{x}_o, t), t) J(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o = \int_{\mathcal{B}_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_o, t) d\Omega_o \quad (3.99)$$

e

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA$$

com $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ em $\partial\mathcal{B}$ na condição de tração prescrita. Adicionalmente,

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o; \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o. \end{aligned}$$

Usando

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = [\boldsymbol{\sigma} \circ \varphi] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o \det(\mathbf{F}) dA_o = \mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o,$$

derivamos

$$\begin{aligned} \left\{ \det(\mathbf{F}) [\boldsymbol{\sigma} \circ \varphi] [\mathbf{F}^T]^{-1} - \mathbf{P} \right\} \mathbf{n}_o dA_o &= 0 \quad \forall \mathbf{n}_o \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{P} &= \det(\mathbf{F}) [\boldsymbol{\sigma} \circ \varphi] [\mathbf{F}^T]^{-1} \\ [\boldsymbol{\sigma} \circ \varphi] &= \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA = \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o = \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o = \int_{\Omega_o} \operatorname{div}(\mathbf{P}) d\Omega_o. \quad (3.100)$$

Esta relação permite finalmente escrever a forma forte na configuração de referência, ie, substituindo as eqs.3.99 e 3.100 na eq.3.98:

$$\int_{\Omega_o} [\operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) + \rho_o(\mathbf{x}_o) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o = 0.$$

3.13.2 Formulação Forte: Configuração de Referência

O problema chamado de *formulação forte* pode ser enunciado como:

Problema 13 Determine $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t)$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) + \rho_o(\mathbf{x}_o) \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}_o, t) &= 0, & em & \quad \mathbf{x}_o \in \Omega_o; \\ \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) &= \bar{\mathbf{t}}_o(\mathbf{x}_o, t), & em & \quad \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^t; \\ \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) &= \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o, t), & em & \quad \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \end{aligned}$$

com $\bar{\mathbf{t}}_o \in [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_o^t)]^3$ e $\bar{\mathbf{b}} \in [L_2(\Omega_o)]^3$.

3.13.3 Princípio do Trabalho Virtual

O princípio do trabalho virtual estabelece que, na ausência de forças inerciais:

$$\delta \mathcal{W}^{ext} = \delta \mathcal{W}^{int} \quad (3.101)$$

Assim, o trabalho virtual externo é dado por

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{ext} &= \int_{\Omega_o} \rho_o \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \bar{\mathbf{t}}_o \cdot \delta \mathbf{u} \, dA_o; \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \bar{b}_i \delta u_i \, d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \bar{t}_{oi} \delta u_i \, dA_o; \\ &= \int_{\Omega_o} \rho_o \bar{b}_i \delta u_i \, d\Omega_o + \int_{\Omega_o} \frac{\partial(P_{ji} \delta u_i)}{\partial x_{oj}} \, d\Omega_o; \\ &= \int_{\Omega_o} \left[\rho_o \bar{b}_i \delta u_i + \frac{\partial(P_{ji})}{\partial x_{oj}} \delta u_i + P_{ji} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_{oj}} \right] d\Omega_o; \\ &= \int_{\Omega_o} \left\{ \left[\frac{\partial(P_{ji})}{\partial x_{oj}} + \rho_o \bar{b}_i \right] \delta u_i + P_{ji} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_{oj}} \right\} d\Omega_o. \end{aligned}$$

Consequentemente, na ausência de forças inerciais

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W}^{ext} &= \int_{\Omega_o} P_{ji} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_{oj}} \, d\Omega_o; \\ &= \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \delta \mathbf{u} \, d\Omega_o; \\ &= \delta \mathcal{W}^{int}. \end{aligned}$$

3.13.4 Formulação Fraca do Problema: Configuração de Referência

Definindo-se, neste ponto, os seguintes conjuntos, para cada $t \in [0, t_f]$

$$\begin{aligned} Kin_u(\Omega_o) &= \left\{ \mathbf{u}_o : \Omega_o \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}_o \in [H^1(\Omega_o)]^3, \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) = \bar{\mathbf{u}}_o(\mathbf{x}_o) \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \right\}; \\ Var_u(\Omega_o) &= \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \Omega_o \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{\mathbf{v}} \in [H^1(\Omega_o)]^3, \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o) = 0 \text{ em } \mathbf{x}_o \in \Gamma_o^u \right\}, \end{aligned}$$

a formulação fraca do problema pode ser descrita do seguinte modo:

Problema 14 Determine $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) \in \text{Kin}_u(\Omega_o)$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$\int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o + \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o, \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_u(\Omega_o). \quad (3.102)$$

ou denotando, para cada $t \in [0, t_f]$,

$$F(\mathbf{u}_o; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t}_o \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o$$

o problema pode ser reescrito como

Problema 15 Determine $\mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t) \in \text{Kin}_u(\Omega_o)$, para cada $t \in [0, t_f]$, tal que

$$F(\mathbf{u}_o; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_u(\Omega_o). \quad (3.103)$$

3.14 Formulação Incremental

Relembrando que na formulação incremental entre o instante t_n e t_{n+1} , considera-se que:

- A configuração e as variáveis de estado sejam conhecidas em Ω_n ;
- As equações de equilíbrio sejam impostas em Ω_{n+1} .

Assim, o campo de deslocamentos é representado por

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_n) &= \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_o & \therefore & \quad \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_n); \\ \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_{n+1}) &= \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_o & \therefore & \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_o(\mathbf{x}_o, t_{n+1}), \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1} &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}; \\ \mathbf{F}_n &= \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

Desta forma, em t_{n+1} , a forma fraca do problema pode ser formulada como:

Problema 16 Determine $\mathbf{u}_{n+1} \in \text{Kin}_o^u$ tal que

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_o^u, \quad (3.104)$$

em que

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}_{n+1}; \hat{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} d\Omega_o - \int_{\Gamma_o^t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dA_o.$$

Notando que o problema acima é não linear em relação à \mathbf{u}_{n+1} , é proposto o método de Newton para a sua solução.

3.14.1 Linearização e Método de Newton

Seja

$$\mathbf{u}_{n+1}^0 = \mathbf{u}_n, \quad k = 0 \quad (3.105)$$

em que k denota a iteração no processo de Newton, iniciando em $k = 0$ e supondo que o valor inicial seja dado pelo último valor convergido da solução do problema do incremento anterior, i.e., \mathbf{u}_n . Logo na k -ésima iteração tem-se

$$\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k. \quad (3.106)$$

Com o objetivo de determinar $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k$ é imposta a condição

$$F(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in Var_o^u, \quad (3.107)$$

i.e.,

$$F(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}; \hat{\mathbf{v}}) = F(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \quad \hat{\mathbf{v}} \in Var_o^u. \quad (3.108)$$

Considerando $F(\cdot, \cdot)$ como sendo suficientemente regular, e expandindo $F(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}})$ em uma série de *Taylor* em \mathbf{u}_{n+1}^k , obtemos, para uma aproximação de primeira ordem,

$$F(\mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) \simeq F(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) + DF(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k]. \quad (3.109)$$

Agora, pela Eq.(3.108) é possível escrever

$$DF(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k] = -F(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}). \quad (3.110)$$

Determinação de $DF(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k]$

Pela definição, tem-se que

$$\begin{aligned} DF(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) [\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) - F(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}})}{\epsilon}; \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \left[F(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) \right]_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Como Ω_0 é fixo no espaço e supondo que $\mathbf{t}_{o_{n+1}}$ e $\bar{\mathbf{b}}_{n+1}$ sejam independentes de \mathbf{u} , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \left[F(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}}) \right]_{\epsilon=0} &= \frac{d}{d\epsilon} \left[\int_{\Omega_o} \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) : \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o \right]_{\epsilon=0}; \\ &= \int_{\Omega_o} \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) \right]_{\epsilon=0} : \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_o. \end{aligned}$$

Sendo $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k))$, é possível escrever

$$\frac{d}{d\epsilon} \mathbf{P}(\mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k))_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k) \right]_{\epsilon=0}.$$

Entretanto,

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}_{n+1}^k + \epsilon \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right)$$

e conseqüentemente

$$\left. \frac{d\mathbf{F}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right)$$

o que finalmente implica em

$$\left. \frac{d\mathbf{P}}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{F}} \right] \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right).$$

Assim

$$DF \left(\mathbf{u}_{n+1}^k; \hat{\mathbf{v}} \right) \left[\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right] = \int_{\Omega_0} \left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right] \nabla \left(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^k \right) : \nabla \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega_0$$

em que \mathbb{A} (tensor de quarta ordem) é o módulo tangente global, o qual é dado por

$$\left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k}.$$

Porém, tendo em vista a definição

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T},$$

tem-se

$$\left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} \left(\tau_{ip} F_{jp}^{-1} \right) = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} + \tau_{ip} \frac{\partial F_{jp}^{-1}}{\partial F_{kl}}.$$

Lembrando que

$$\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I};$$

temos

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial F_{kl}} \right) \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial F_{kl}} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} \right) = -\mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{F}} \right) \mathbf{F}^{-1}$$

o que nos permite derivar

$$\left(\frac{\partial F_{jp}^{-1}}{\partial F_{kl}} \right) = -F_{jm}^{-1} \frac{\partial F_{ms}}{\partial F_{kl}} F_{sp}^{-1} = -F_{jm}^{-1} \delta_{mk} \delta_{sl} F_{sp}^{-1} = -F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}.$$

Assim, o módulo tangente global pode ser escrito da seguinte forma

$$\left[\mathbb{A} \left(\mathbf{u}_{n+1}^k \right) \right]_{ijkl} = \left. \frac{\partial P_{ij}}{\partial F_{kl}} \right|_{\mathbf{u}_{n+1}^k} = \frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} F_{jp}^{-1} - \tau_{ip} F_{jk}^{-1} F_{lp}^{-1}. \quad (3.111)$$

3.15 Notas Sobre a Determinação de \mathbb{A}

O cálculo de \mathbb{A} requer a determinação da derivada da tensão de *Kirchhoff* com relação ao gradiente da deformação. Porém, é possível escrever $\boldsymbol{\tau}$ como função da tensão rotacionada de

Kirchhoff, $\bar{\tau}$.

$$\bar{\tau} = (\mathbf{R}^e)^T \tau \mathbf{R}^e$$

então

$$\tau = \mathbf{R}^e \bar{\tau} (\mathbf{R}^e)^T.$$

Como resultado em forma indicial,

$$\frac{\partial \tau_{ip}}{\partial F_{kl}} = \frac{\partial}{\partial F_{kl}} (R_{im}^e \bar{\tau}_{ms} R_{ps}^e) = \frac{\partial R_{im}^e}{\partial F_{kl}} \bar{\tau}_{ms} R_{ps}^e + R_{im}^e \frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}} R_{ps}^e + R_{im}^e \bar{\tau}_{ms} \frac{\partial R_{ps}^e}{\partial F_{kl}}$$

ou na forma tensorial

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{R}^e}{\partial \mathbf{F}} \bar{\tau} (\mathbf{R}^e)^T + (\mathbf{R}^e) \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \mathbf{F}} (\mathbf{R}^e)^T + (\mathbf{R}^e) \bar{\tau} \frac{\partial (\mathbf{R}^e)^T}{\partial \mathbf{F}}.$$

Agora

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{ms}}{\partial F_{kl}} = \hat{D}_{mskl}^{vp} = \hat{\mathbb{D}}_{mskl}$$

e sabendo que

$$\bar{\tau}_{n+1} = \mathbb{D}(\rho^*) \mathbf{E}_{n+1}^e$$

em que

$$\mathbb{D}(\rho^*) = 2\mu(\rho^*) \mathbb{I} + \left(\kappa(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}),$$

temos

$$\bar{\tau} = 2\mu(\rho^*) \mathbf{E}^e + \left(\kappa(\rho^*) - \frac{2}{3}\mu(\rho^*) \right) \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}.$$

Pode-se separar $\hat{\mathbb{D}}$ em duas parcelas. A primeira refere-se à variação dos parâmetros materiais com relação ao gradiente da deformação. A segunda, tem-se que os parâmetros materiais são conservados fixos com relação ao gradiente da deformação. Assim:

$$\hat{\mathbb{D}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} = \left(\frac{\partial \mathbb{D}(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \right) + \left(\mathbb{D}(\rho^*) \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \right); \quad (3.112)$$

$$\mathbb{B} = \left(\frac{\partial \mathbb{D}(\rho^*)}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \mathbf{E}_{n+1}^e \right); \quad (3.113)$$

$$\tilde{\mathbb{D}}\mathbb{G}\mathbb{H} = \left(\mathbb{D}(\rho^*) \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^e}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \right) = \frac{\partial \bar{\tau}_{n+1}}{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{teste}} : \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^{teste}}{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}} : \frac{\partial \mathbf{C}_{n+1}^{teste}}{\partial \mathbf{F}_{n+1}} \quad (3.114)$$

i.e.,

$$\hat{\mathbb{D}} = \mathbb{B} + \tilde{\mathbb{D}}\mathbb{G}\mathbb{H}$$

A determinação de $\hat{\mathbb{D}}$ decorre de um desenvolvimento a partir da equação constitutiva para a configuração não rotacionada aliada ao fato de $\mathbf{R}^e = \mathbf{R}^{e^{teste}}$, restando agora a determinação do tensor de quarta ordem $\frac{\partial \mathbf{R}^e}{\partial \mathbf{F}}$ que segue de algebrismos sobre a decomposição polar do tensor \mathbf{F} . Perceba ainda que a determinação de \mathbb{G} requer uma derivada do tipo $\frac{\partial \ln(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$. Este tipo de derivada é a derivada de uma função isotrópica. Esta classe de derivadas foi investigada em detalhes por [107], [106] e [80]. Neste trabalho foi implementada a proposta apresentada por [80].

O tensor de quarta ordem $\tilde{\mathbb{D}}$ é a única contribuição oriunda da relação constitutiva do material, no módulo tangente consistente \mathbb{A} . As demais contribuições são todas relacionadas à parte geométrica ou devido à dependência da densidade relativa. De fato, $\tilde{\mathbb{D}}$ depende se o estado é elástico ou viscoplástico sendo calculado admitindo o parâmetro da densidade relativa constante, i.e., $\rho^* = cte$. Se $\mathcal{F} \leq 0$, $\tilde{\mathbb{D}}$ é considerado como o módulo elástico \mathbb{D} , e se $\mathcal{F} > 0$ então $\tilde{\mathbb{D}}$ é o módulo tangente consistente viscoplástico \mathbb{D}^{vp} , que deve ser determinado à partir da solução do sistema de equações locais.

3.16 Exemplos Numéricos

Nesta seção são apresentados alguns resultados numéricos a fim de avaliar os aspectos referentes à performance do modelo constitutivo para espumas e da sua implementação utilizando o MEF em grandes deformações. O código foi escrito em Fortran 90/95, orientado à objeto, e utilizou-se o compilador da Compaq 6.5. O posprocessamento foi realizado com o uso do software GID 8.0. Os resultados numéricos das análises aqui realizadas foram obtidos sob uma tolerância de convergência global de 10^{-6} .

- Exemplo 1: Considera uma análise simples de compressão unidimensional de forma a verificar a relação tensão-deformação, a qual incorpora uma resposta hiperelástica não linear dependente da densidade relativa. As dimensões do corpo de prova são $50mm$ de altura com raio de secção transversal inicial de $28mm$. Este exemplo apresenta a configuração de referência $\Omega_o = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < x < 28 \text{ e } 0 < y < 50\}$ sob considerações axisimétricas. Impondo um deslocamento prescrito de $\bar{u} = -30mm$ na direção y , tem-se então: Nas

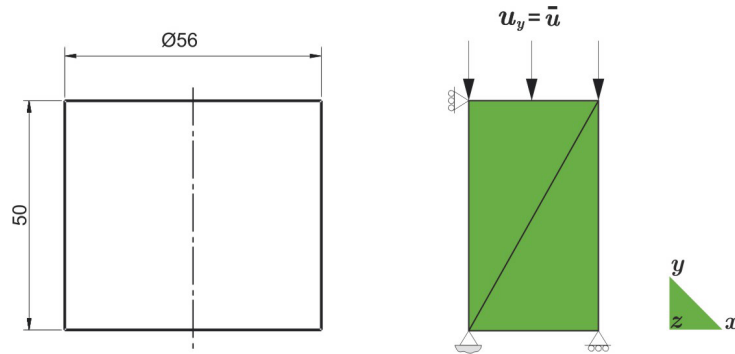


Figura 3.17: Ensaio de compressão uniaxial

figuras seguintes são mostrados os gráficos comparativos entre os resultados de tensão-deformação obtidos experimentalmente por [125] e o resultado numérico da análise aqui realizada. Utilizou-se nesta análise dois elementos triangulares de seis nós isoparamétricos. Os parâmetros c e γ foram adotados baseados nos estudos de [89] e [88]. Nestes gráficos são plotadas a tensão de Cauchy versus a deformação logarítmica com os seguintes parâmetros

materiais:

$$\begin{aligned}
 \tau_y^o &= 0,10528 \text{ MPa}; \\
 p_c^o &= 0,04047 \text{ MPa}; \\
 \alpha_p &= 0,1; \\
 E_M &= 928,09288 \text{ MPa}; \\
 \rho_o^* &= 0,049; \\
 \nu_p &= 0,0; \\
 \nu &= 0,25; \\
 \gamma &= 1,54; \\
 c &= 0,3; \\
 M &= 4,0; \\
 K_v &= 0,005; \\
 \bar{\eta} &= 10^{-5}.
 \end{aligned}$$

As figuras 3.18 e 3.19 mostram a curva tensão-deformação para o problema de compressão

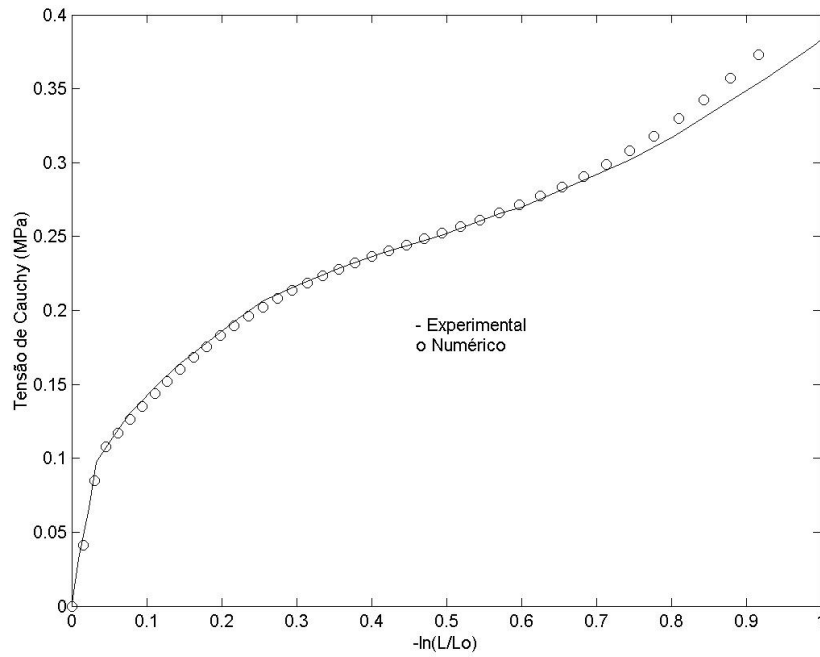


Figura 3.18: Ensaio de compressão (0,0016 1/s)

uniaxial com taxas de deformação distintas, respectivamente $1,6 \times 10^{-3} s^{-1}$ e $8,0 \times 10^{-2} s^{-1}$. A resposta produzida pelo código aqui desenvolvido, para o modelo de espumas celulares apresenta boa concordância com os valores experimentais obtidos por [125] para a espuma em polipropileno com densidade nominal de $49,0 \text{ Kg}/m^3$. Os parâmetros materiais foram

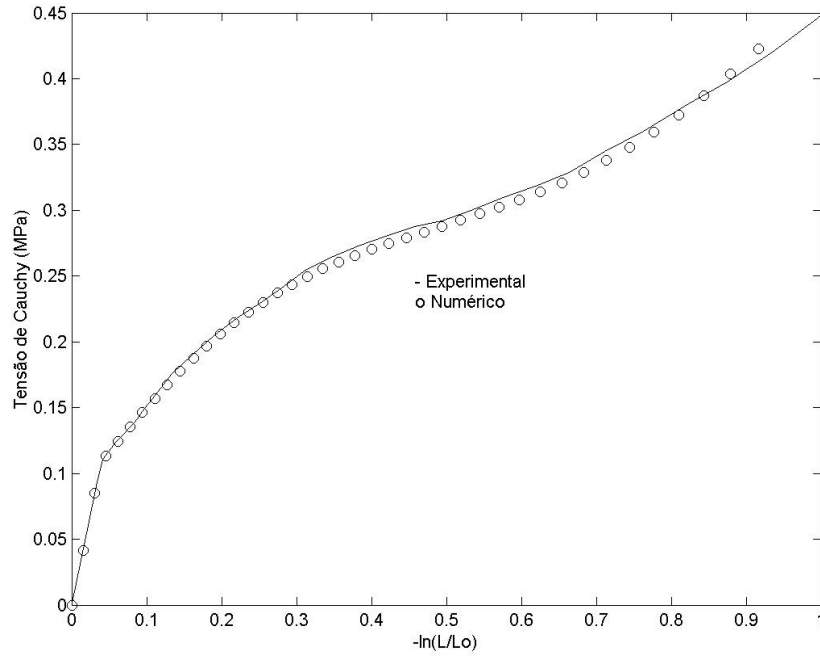


Figura 3.19: Ensaio de compressão (0,08 1/s)

calibrados tomando por base os dados experimentais descritos em [125]. Segundo os resultados obtidos por [125], nesta aplicação não há endurecimento hidrostático, fenômeno este que também foi desconsiderado aqui para efeito de comparação dos resultados. Os valores $\bar{\varepsilon}_v^{vp} = \bar{\varepsilon}_a^{vp} = 0,90196$ (taxa: $0,0016 \text{ s}^{-1}$) e $\bar{\varepsilon}_v^{vp} = \bar{\varepsilon}_a^{vp} = 0,90058$ (taxa: $0,08 \text{ s}^{-1}$) foram os valores da deformação plástica volumétrica atingida na configuração atual, ou seja, no instante final da análise quando o processo de deformação do material ultrapassa o platô de colapso e atinge o regime de densificação, onde o nível de tensões cresce bruscamente. Pôde-se notar também que nessa etapa a deformação volumétrica mantém-se uniforme em todo o domínio, como era de se esperar, para o caso de compressão uniaxial pura. A densidade relativa no instante final da análise atingiu os seguintes valores $\rho^* = 0,1216$ (taxa: $0,0016 \text{ s}^{-1}$) e $\rho^* = 0,1216$ (taxa: $0,08 \text{ s}^{-1}$). Vale comentar ainda que neste exemplo o carregamento implementado é em forma de uma rampa de carregamento linear onde 1000 incrementos foram utilizados. As tensões equivalentes de von Mises no instante final da análise são dados por: $\sigma_{vm} = 0,37324 \text{ MPa}$ (taxa: $0,0016 \text{ s}^{-1}$) e $\sigma_{vm} = 0,42254 \text{ MPa}$ (taxa: $0,08 \text{ s}^{-1}$).

- Exemplo 2: Este exemplo considera um problema axissimétrico que consiste em um tronco de cone, com as seguintes dimensões: $r_1 = 90\text{mm}$; $r_2 = 45\text{mm}$ e $h = 100\text{mm}$. A análise consiste num deslocamento prescrito na tampa circular superior, cujo deslocamento total prescrito foi de $\bar{u} = -50 \text{ mm}$ (à taxas de $0,0016 \text{ s}^{-1}$ e $0,08 \text{ s}^{-1}$), aplicado em 1000 incrementos. Uma malha de 240 elementos triangulares *Tri 6* isoparamétricos foi utilizada. Vale ressaltar que outros elementos/malhas (mais refinadas) foram explorados e

que nenhuma alteração significativa nos resultados foi notada. Os parâmetros utilizados nesta análise foram os mesmos do exemplo anterior. A figura (3.20) mostra o problema de forma esquemática na configuração de referência. Os campos de deformação viscoplástica

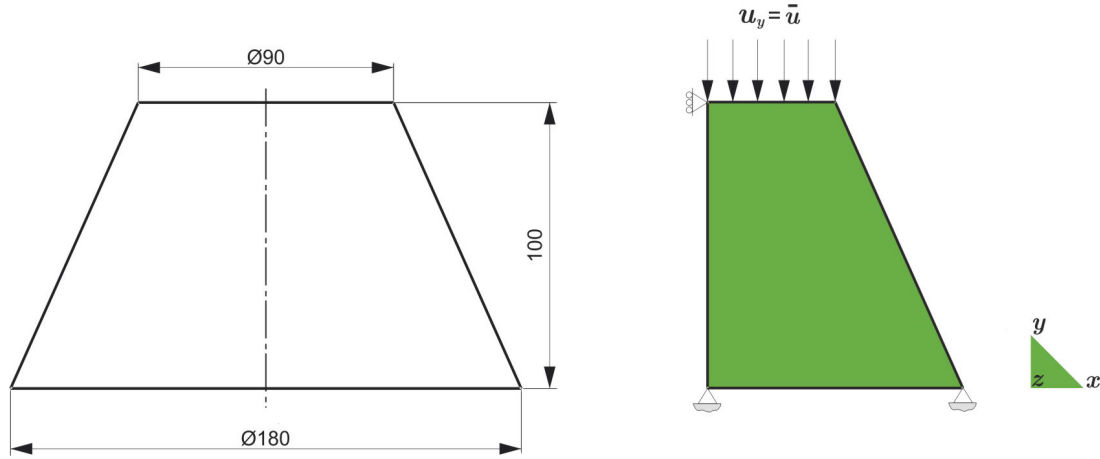


Figura 3.20: Tronco de cone

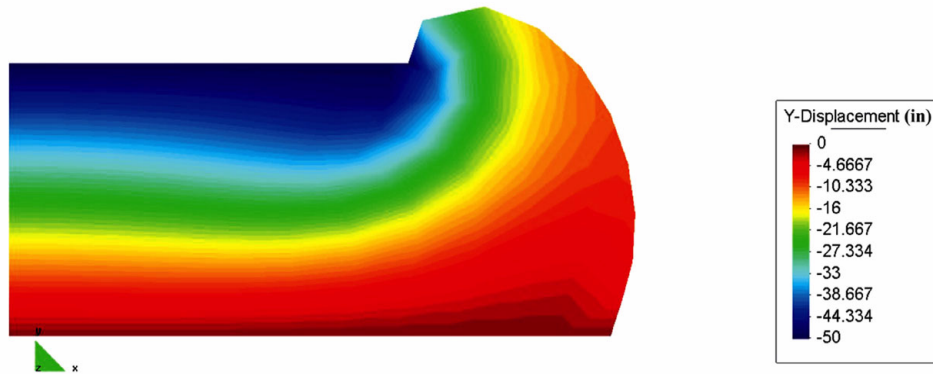


Figura 3.21: Deslocamento Y ($0,0016s^{-1}$ e $0,08s^{-1}$)

(3.23 e 3.24) e deslocamento na direção (3.21) demonstram como a resposta do material varia conforme deforma-se o corpo. Note que devido a uma maior taxa de deformação (3.24) ocorre um maior nível de deformação plástica quando comparado com os resultados obtidos a uma menor taxa de deformação (3.23). Pode-se também ter uma avaliação qualitativa da distribuição de tensão de von Mises em seu interior pela figura 3.25 e 3.26. Note aqui também que devido a uma maior taxa de deformação (3.26) ocorre um maior nível de tensão quando comparado com os resultados obtidos a uma menor taxa de deformação (3.25), para um mesmo deslocamento prescrito final. Percebe-se a existência de uma concentração de tensão no canto superior direito do domínio, conforme mostrado nas figuras 3.27, 3.28, 3.29, 3.30, 3.31 e 3.32. Note aqui também que devido a uma maior taxa

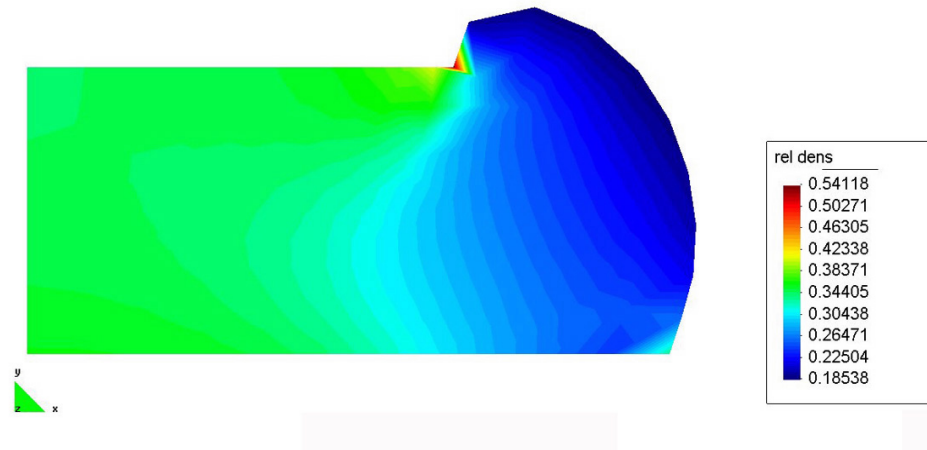


Figura 3.22: Densidade relativa ($0,0016s^{-1}$ e $0,08s^{-1}$)

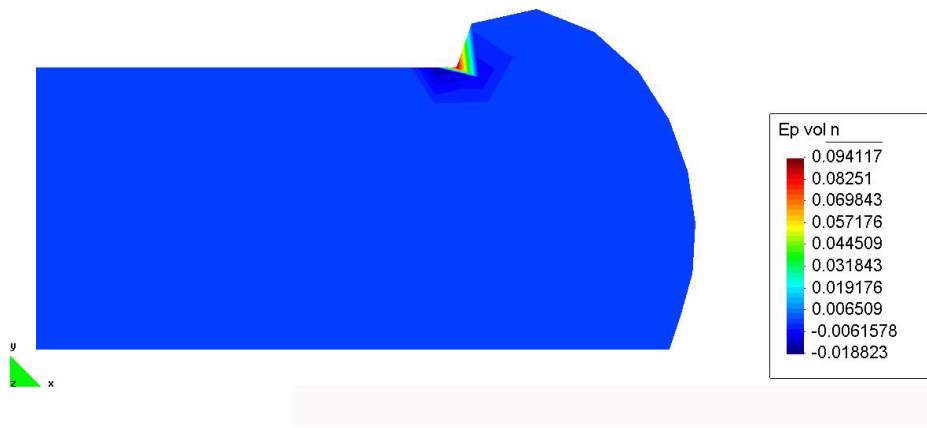


Figura 3.23: Deformação volumétrica plástica ($0,0016s^{-1}$)

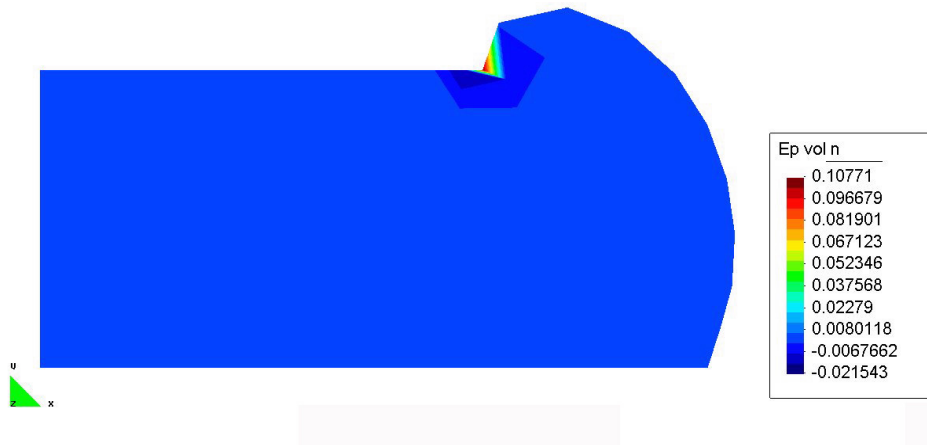


Figura 3.24: Deformação volumétrica plástica ($0,08s^{-1}$)

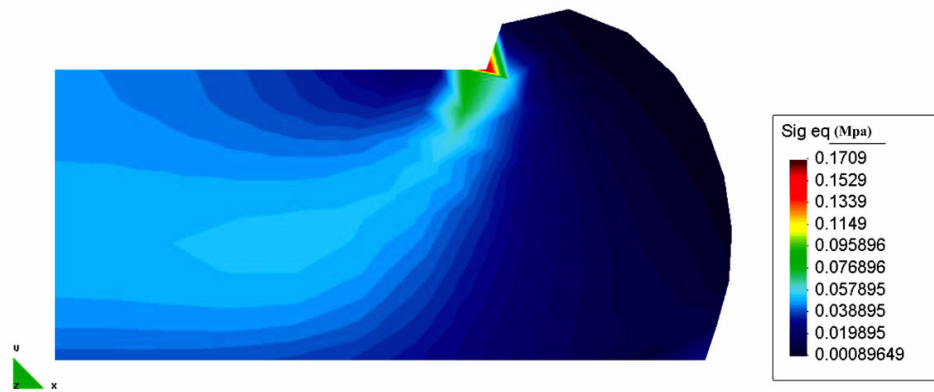


Figura 3.25: Tensão equivalente de von Misses ($0,0016s^{-1}$)

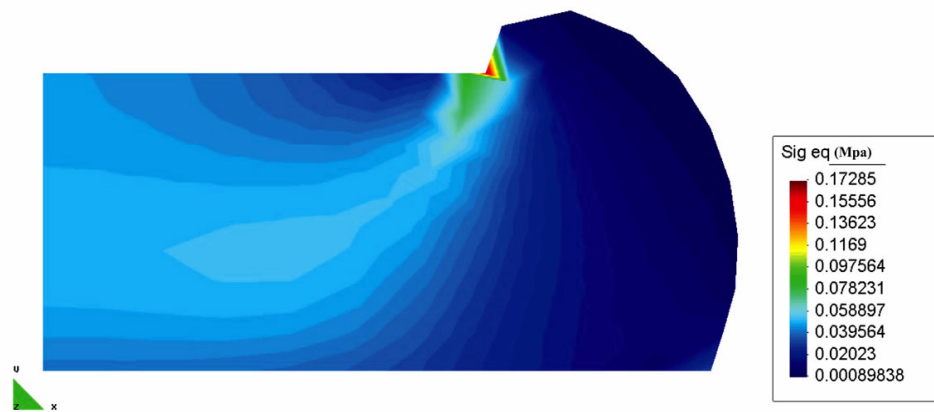


Figura 3.26: Tensão equivalente de von Misses ($0,08s^{-1}$)

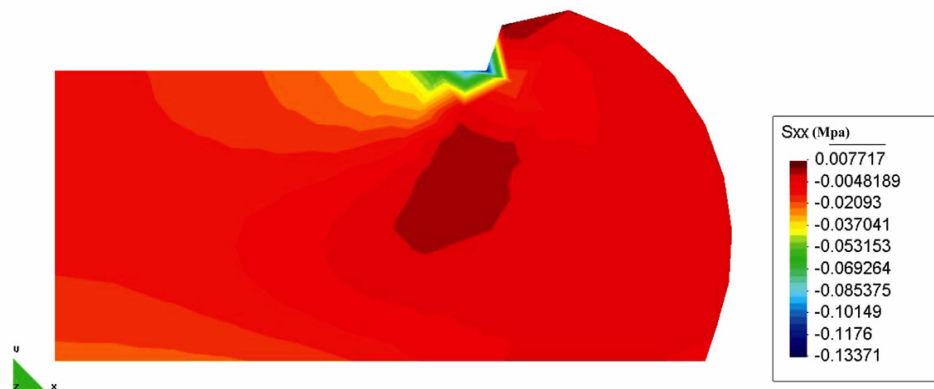


Figura 3.27: Tensão de Cauchy na direção x ($0,0016s^{-1}$)

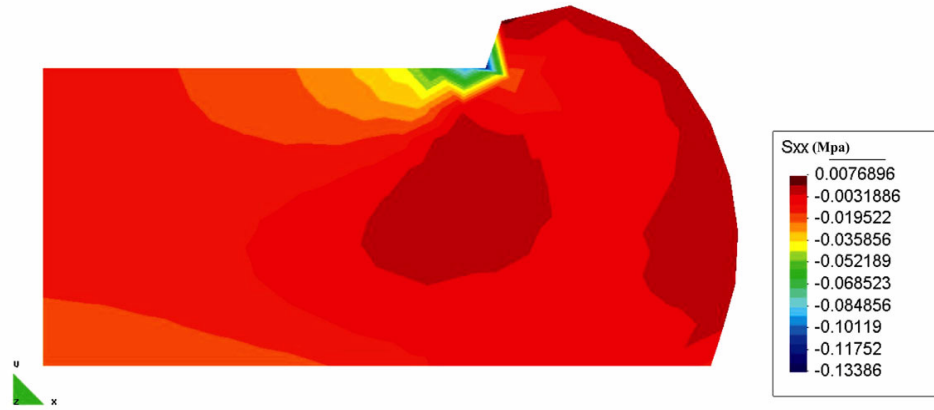


Figura 3.28: Tensão de Cauchy na direção x ($0,08s^{-1}$)

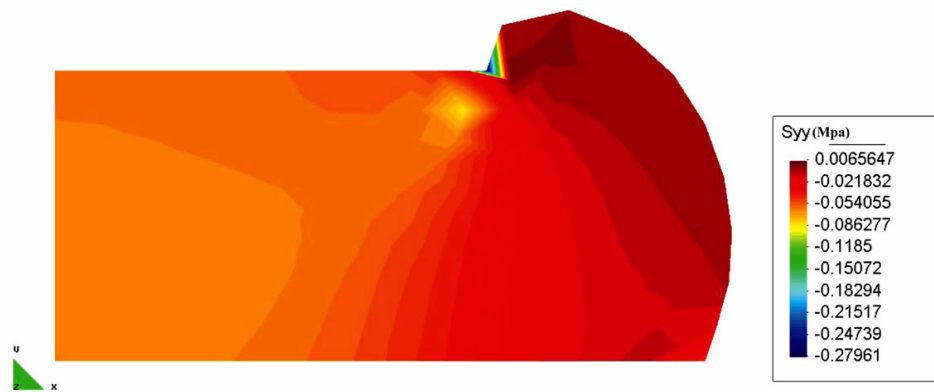


Figura 3.29: Tensão de Cauchy na direção y ($0,0016s^{-1}$)

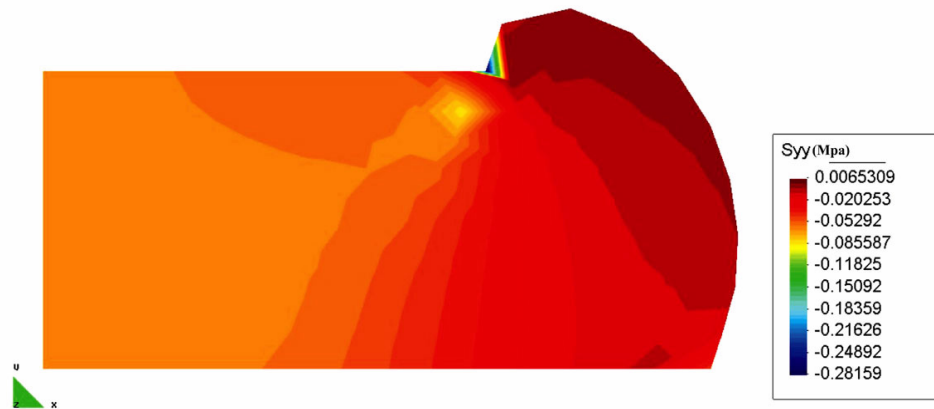


Figura 3.30: Tensão de Cauchy na direção y ($0,08s^{-1}$)

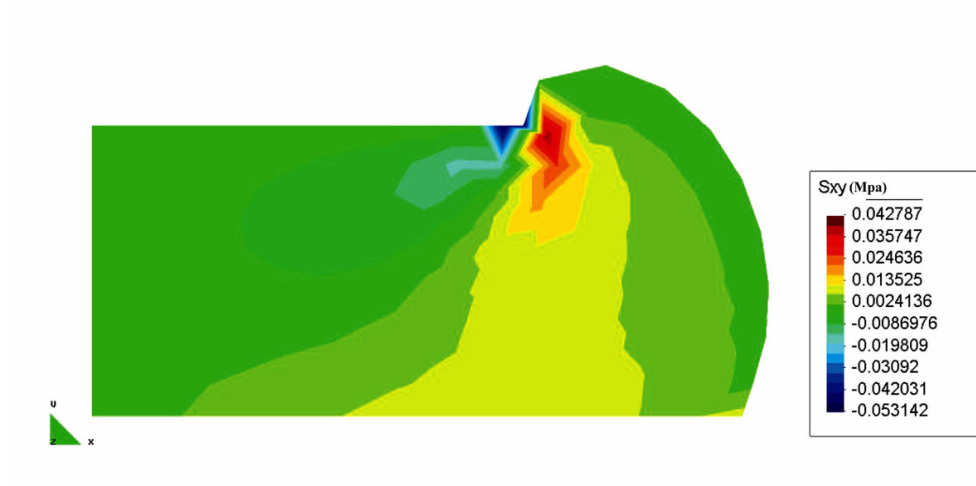


Figura 3.31: Tensão cisalhante ($0,0016s^{-1}$)

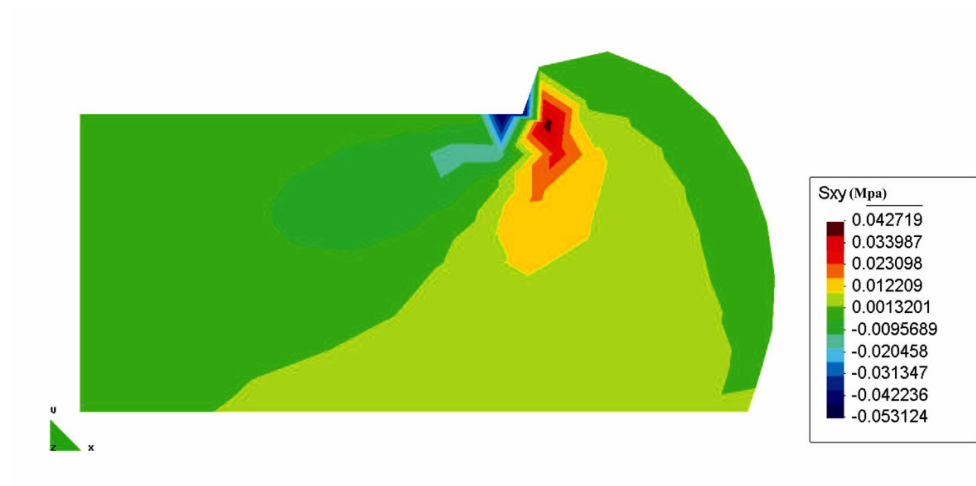


Figura 3.32: Tensão cisalhante ($0,08s^{-1}$)

de deformação (3.28, 3.30 e 3.32) há a existência de um maior nível de tensão, na quina oriunda do patamar superior com a face inclinada do corpo, quando comparado com os resultados obtidos a uma menor taxa de deformação (3.27, 3.29 e 3.31). A figura 3.21 mostra que o deslocamento máximo atingido foi de 50 mm na direção y , i.e., exatamente 100% do valor inicialmente prescrito, o que mostra um caráter robusto ao algoritmo de solução dentro do escopo de grandes deformações. Vale comentar que para um aumento no deslocamento prescrito em y , não se obteve um resultado final com 100% do valor inicial prescrito. Notou-se que após este limite ocorre um forte gradiente de deformação na região de concentração de tensões o que acarreta um severo mau condicionamento ao sistema a ser resolvido, fazendo com que o algoritmo incremental não falhe em termos de convergência.

- Exemplo 3: Neste exemplo é apresentada a compressão de um corpo de prova retangular com dimensões de altura igual a 1 mm e largura igual a $0,5\text{ mm}$, sujeito a um estado plano de deformações. Este corpo está fixado na face direita, na direção x , e sujeito a um deslocamento prescrito de $\bar{u} = -0,3\text{ mm}$ (a uma taxa de $0,0016\text{ s}^{-1}$) na face esquerda na direção negativa da coordenada x . As demais condições de contorno são de tensão livre. Devido a uma questão de economia computacional considerou-se apenas a parte superior do domínio com a respectiva condição de simetria, como ilustrado na figura seguinte (fig. 3.33). A malha utilizada consta de 98 elementos isoparamétricos triangulares de seis nós

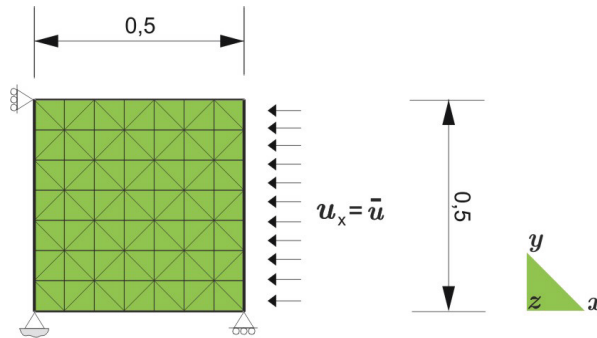
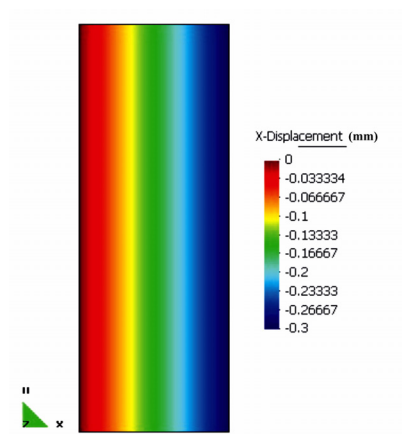
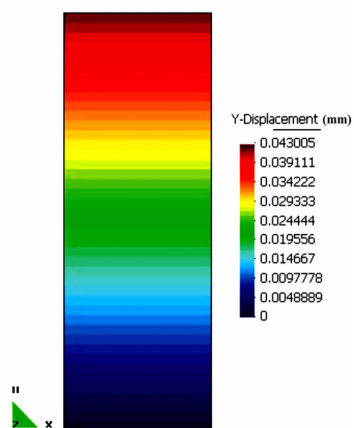
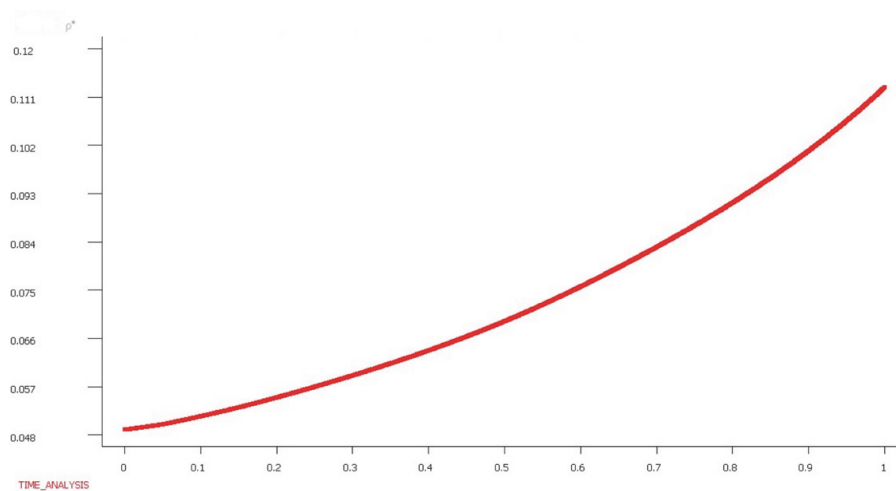


Figura 3.33: Compressão lateral do polipropileno

(Tri6). Vale comentar ainda que neste exemplo o carregamento implementado é em forma de uma rampa de carregamento linear em que 2000 incrementos foram utilizados. Os parâmetros utilizados nesta análise foram os mesmos do primeiro exemplo. As figuras 3.34 e 3.35 mostram os campos de deslocamento nas direções x e y respectivamente, no instante final da análise. O valor $\bar{\varepsilon}_v^{vp} = \bar{\varepsilon}_a^{vp} = 0,6687$ foi o valor da deformação plástica volumétrica atingida na configuração atual, ou seja, no instante final da análise. Pode-se notar também que nessa etapa a deformação volumétrica mantém-se uniforme em todo o domínio, como era de se esperar, para o caso de compressão uniaxial pura. A fig. 3.36 mostra a evolução da densidade relativa com o fator de carga durante todo o período da análise, para um ponto particular do domínio. A densidade relativa atingida no instante final da análise foi de $\rho^* = 0,1128$. A tensão equivalente de von Misses no instante final da análise foi

Figura 3.34: Deslocamento em x (exemplo 3)Figura 3.35: Deslocamento em y (exemplo 3)Figura 3.36: Densidade relativa ρ^* vs. fator de carga

da ordem de $\sigma_{vm} = 5,992 \text{ MPa}$. A tensão de Cauchy no instante final da análise foi de $\sigma_{xx} = -6,405 \text{ MPa}$. Vale ressaltar ainda que os valores atingidos por ρ^* , σ_{vm} e σ_{xx} ao longo da evolução da análise mantiveram-se uniformes em todo o domínio, como era de se esperar, para o caso de compressão uniaxial pura.

- Exemplo 4: Neste exemplo é apresentado o esmagamento de uma bucha anelada. O modelo é considerado axissimétrico e possui as dimensões mostradas na figura (3.37). Neste caso, há a imposição de um deslocamento prescrito externamente ao anel na direção radial e internamente o anel está montado sobre uma superfície rígida (corpo *indeformável*). Dessa forma a parte exterior do anel move-se na direção negativa da coordenada x com $\bar{u} = -0,3\text{mm}$ (à uma taxa de $0,0016 \text{ s}^{-1}$). Devido a uma questão de economia computacional,

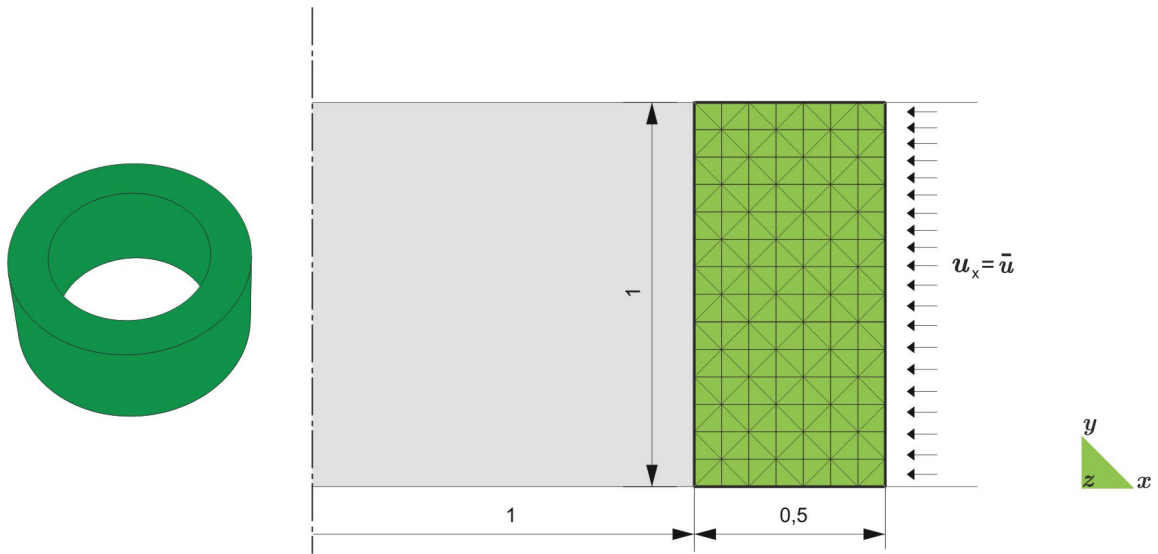
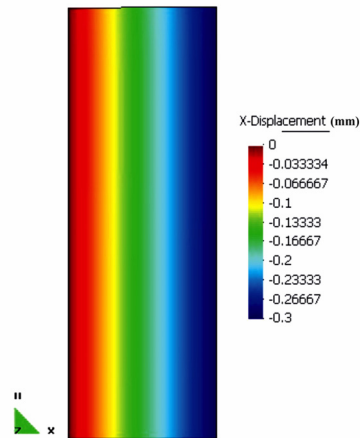
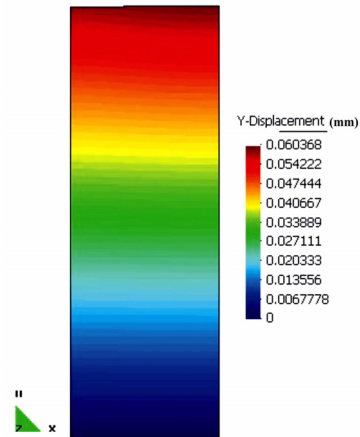
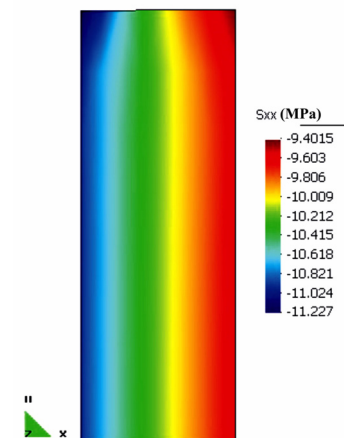


Figura 3.37: Anel de polipropileno

utilizou-se as condições de simetria para simular somente metade do anel cilíndrico (parte superior). A malha utilizada consta de 98 elementos isoparamétricos triangulares de seis nós (*Tri6*). Vale ressaltar que outros elementos/malhas (mais refinadas) foram explorados e que nenhuma alteração significativa nos resultados foi notada. O carregamento é efetuado de forma linear, utilizando-se 3000 incrementos. As figuras 3.38 e 3.39 mostram os campos de deslocamento nas direções x e y respectivamente, no instante final da análise. As figuras 3.40, 3.41 e 3.42, mostram respectivamente as tensões de Cauchy σ_{xx} , σ_{xy} e σ_{yy} no instante final da análise. Note por sua vez que a figura 3.40 mostra uma concentração de tensão no canto superior esquerdo. Perceba também uma concentração de tensão na componente σ_{yy} (fig. 3.42), logo abaixo do topo do anel e próximo da extremidade esquerda. Quanto aos esforços cisalhantes (fig. 3.41), observa-se uma concentração de tensão na parte superior do anel. A deformação volumétrica plástica mostrada na figura 3.43 tende a ser a mesma em todo o corpo. Porém, note que há uma pequena variação devido à natureza axissimétrica da deformação. A figura seguinte (3.44) mostra a distribuição de densidade relativa ao longo de todo o domínio.

Figura 3.38: Deslocamento em x (exemplo 4)Figura 3.39: Deslocamento em y (exemplo 4)Figura 3.40: Tensão de Cauchy na direção x (exemplo 4)

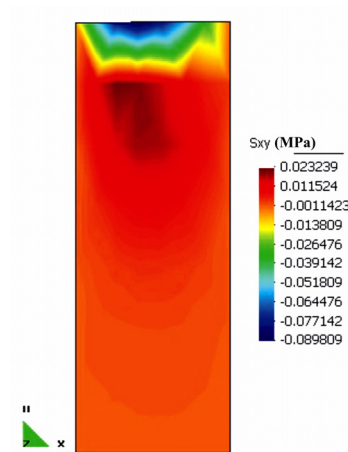


Figura 3.41: Tensão de cisalhamento (exemplo 4)

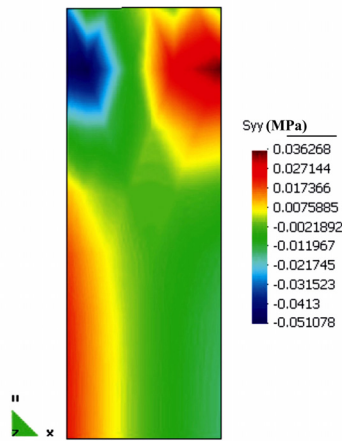
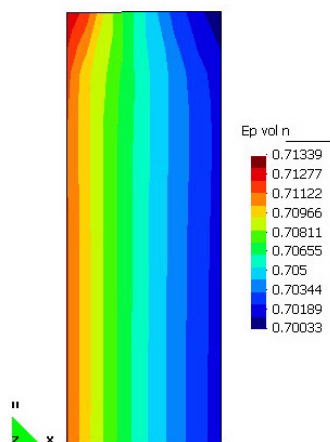
Figura 3.42: Tensão de Cauchy na direção y (exemplo 4)

Figura 3.43: Deformação volumétrica plástica (exemplo 4)

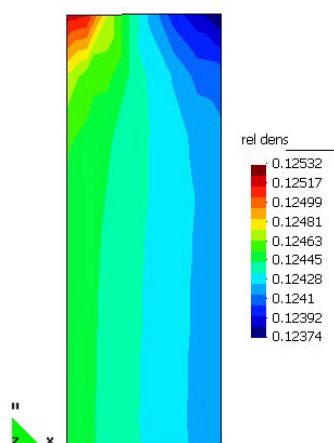


Figura 3.44: Densidade relativa (exemplo 4)

Capítulo 4

Conclusão

O trabalho pode ser dividido didaticamente em duas partes. A primeira trata da apresentação do modelo viscoelástico finito e da sua análise mediante a solução de alguns problemas de valor de contorno. Este modelo se mostrou bastante apropriado e eficaz com relação às aplicações consideradas. A simplicidade de implementação do modelo e a sua versatilidade em problemas científico-tecnológicos são as suas principais vantagens. Por outro lado um ponto de relevância que não foi levado em consideração foi o *problema térmico acoplado* ao mecânico, que deve ser considerado em análises futuras. Um outro ponto relevante é que muito embora computacionalmente tenha-se feito uma análise para cada uma das malhas utilizadas nos problemas abordados, uma estratégia envolvendo *estimadores de erro a posteriori* seria extremamente útil nestes casos. Porém, formulações/propostas neste sentido ainda são escassas na literatura ([95] e [94]). Pode-se comentar ainda que o uso das séries de Dirichlet-Prony apesar de agregarem versatilidade e facilidade de implementação computacional ao modelo, também geraram uma certa dificuldade no que diz respeito a obtenção, na literatura, das funções de relaxamento para os módulos de cisalhamento e volumétrico, sendo necessário alguns ajustes de curvas para os três últimos casos do capítulo 3.

A segunda parte do trabalho trata de espumas poliméricas mediante uma abordagem via elastoviscoplasticidade. Tal modelo mostrou-se eficaz e adequado em descrever a evolução das variáveis internas utilizadas para a simulação numérica do comportamento de sólidos celulares poliméricos, mais especificamente espumas poliméricas. O uso da descrição *Lagrangeana total* (aliado ao par conjugado tensão rotacionada de *Kirchoff* e a medida de deformação logarítmica) e do mapeamento exponencial facilitou imensamente a implementação numérica dos algoritmos, além de agregarem robustez. O modelo constitutivo mostrou-se capaz de representar a dependência do comportamento mecânico com relação à densidade relativa e à taxa de deformação, ao longo de todo o carregamento. Um ajuste de parâmetros materiais foi efetuado, na simulação do ensaio de compressão uniaxial, visando calibrar a solução numérica do modelo com os resultados experimentais. A solução numérica obtida com o ajuste de parâmetros mostrou uma boa concordância qualitativa e quantitativa com os resultados experimentais. Deste modo as propriedades materiais obtidas da calibração foram utilizadas nos demais exemplos. Vale ressaltar que uma certa dificuldade foi encontrada na obtenção de resultados experimentais detalhados para espumas poliméricas. Um ponto importante é a pequena discordância dos

resultados numéricos e experimentais quando em patamares de deformação mais elevados. É provável que a incorporação de uma *teoria de dano* agregaria mais precisão à formulação, no que diz respeito a representação do comportamento mecânico das espumas poliméricas. Uma outra questão diz respeito aos últimos exemplos do capítulo 4. Percebeu-se que para um aumento no deslocamento prescrito em x e r respectivamente, não se obteve um resultado final com 100% do valor inicial prescrito. O que se observou foi um forte gradiente de deformação o qual contribuiu para o mau condicionamento do sistema a ser resolvido, acarretando em falha de convergência do algoritmo para altos valores de deslocamentos prescritos. Embora tenham sido feitas várias investigações sobre os passos de carga, uma estratégia baseada em *arc-length algorithms* acrescentaria uma maior robustez ao código. Um último ponto diz respeito à *adaptatividade da malha* que com certeza melhoraria a precisão dos resultados, além de agregar mais versatilidade ao código, muito embora tenha sido feita uma extensiva análise das malhas adotadas em cada problema abordado.

Sugestões para Trabalhos Futuros

- Incorporação de metodologias adaptativas, estimadores de erro e estratégias de refino de malha aos modelos;
- Incorporação de uma estratégia do tipo *arc-length* e *algoritmos para superação de pontos limites / patamares*;
- Incorporação de uma teoria de dano aos modelos;
- Desenvolvimento e implementação de um modelo para *termoviscoelasticidade*.

Bibliografia

- [1] ADAMS, R. A., Sobolev Spaces, New York, Academic Press, 1975.
- [2] AINSWORTH, M., ODEN, J.T., A posteriori error estimation in finite element analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 142, p. 1-88, 1997.
- [3] AKKARAM, S., A continuum sensitivity analysis of large deformations with applications to metal forming process design, Thesis, Faculty of Graduate Scholl of Cornell University, Cornell University, USA, 2001.
- [4] AKLONIS, J.J., MacKNIGHT, W.J., and SHREN, M., Introduction to Polymer Viscoelasticity, Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [5] Almroth P., Hasselqvist M., Simonsson K., Sjostrom S., Viscoplastic-plastic modelling of IN792, Computational Materials Science 29 (2004) 437-445, 2004.
- [6] ALVES, M.K., ROSSI, R., A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions, enforced by an extended partition of unity finite element weight function, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 57, p. 1523-1552, 2003.
- [7] ALVES, M.K., ROSSI, R., An extension of the partition of unity finite element method, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 3, p. 209-216, 2005.
- [8] BADRINARAYANAN S., ZABARAS, N., A sensitivity analysis for the optimal design of metal-forming processes, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 129, p. 319-348, 1996.
- [9] BAO, Y., A object-oriented implementation of die design problems in metal forming processes using fem method, Dissertation, Faculty of Graduate Scholl of Cornell University, Cornell University, USA, 1999.
- [10] BATHE, K. J., Finite Elements Procedures in Engineering Analysis, New Jersey, Prentice-Hall, p. xiii + 735, 1982.
- [11] BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M., KRYSL, P., Meshless methods: An overview and recent developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, p. 3-47, 1996.

- [12] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., MORAN, B., Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, John Wiley & Sons, England, p. xvi+650, 2000.
- [13] BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., SINGER, M., On Adaptivity and Error Criteria for Meshfree methods, New Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics, edited by P. Ladeveze and J.T. Oden, 1998.
- [14] BENALLAL, A., BILLARDON, R., DOGHRI, I., An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations, Communications in Applied Numerical Methods, v. 4, p.731-740, 1988.
- [15] BENALLAL, A., COMI, C., LEMAITRE, J., Critical Damage States at Crack Initiation, Damage Mechanics Localization - ASME, AMD-v. 142/MD-v.34, p. 13-23, 1992.
- [16] BENDLER, J. T., NOBLE, B., HUSSAIN, M. A., Solution of An Equation for Creep in Solid Polimers, Computers in Engineering, n^o 3 in 1, p. 365-368,1988.
- [17] BODNER, S. R., in Mechanical Behavior of Materials Under Dynamic Loads (Symp. San Antonio, 1967, ed. U. S. Lindholm), Springer-Verlag, New York, p. 176, 1968.
- [18] BONET, J., WOOD, R.D., Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, Cambridge Univerity Press, USA, p. xvii + 248, 1997.
- [19] BRENNER, S. C., SCOTT, L. R., The Mathematical Theory of Finite Element Method, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [20] BUGEDA, G., Estimación y corrección del error en el análisis estructural por MEF, CIMNE Monograph n^o 9, CIMNE, Barcelona, Spain, 1991.
- [21] CALLISTER JR., W.D., Materials Science and Engineering: an Introduction, Third Edition, John Wiley e Sons, Inc, New York, 1994.
- [22] CANEVAROLO Jr., S.V., Ciência dos Polímeros: Um Texto Básico para Tecnólogos e Engenheiros, Artliber Editora, São Paulo, 2002.
- [23] Chaboche J.L., Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity, Int. J. Plasticity, Vol. 5, pp. 247-302, 1989.
- [24] Chaboche J.L., Unified cyclic viscoplasticity constitutive equations: development and thermodynamic framework, Unified Constitutive Laws of Plastic Deformation, Academic Press, 1996.
- [25] Chaboche J.L. and Rousselier G., On the plastic and viscoplastic constitutive equations – part I: rules developed with internal variable concept, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 105, pp. 153-158, 1983.
- [26] CHEN J-S., YOON S., WANG, H-P., LIU, W.K., An improved reproducing kernel particle method for nearly incompressible finite elasticity, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 181, p. 117-187, 2000.

- [27] CHERN, J. T., Finite Element Modeling of Viscoelastic Materials on Theory of Fractional Calculus, USA, PhD Thesis, Penn. State Uni., 1993.
- [28] CHRISTENSEN, R.M., Theory of Viscoelasticity, 2nd ed., Academic Press, New York, 1982.
- [29] CRIESFIELD, M.A., Non-linear finite element analysis of solid and structures, v. 2, England, Wiley, p. xiv + 494, 1997.
- [30] DAUTRAY, R., LIONS, J. L., Mathematical analysis and numerical methods for science and technology v. 2, Springer-Verlag, New York, p. 561, 1984.
- [31] DESAI, C.S., A general basis for yield failure and potential functions in plasticity, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, v. 4, p. 361-375, 1980.
- [32] DESAI, C. S., Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials, New Jersey, Prentice-Hall, p. 468, 1984.
- [33] DESAI, C. S., Mechanics of materials and interfaces, Boca Raton, RCR Press LLC, 2001.
- [34] DESAI, C.S., HASHMI, Q.S.E., Analysis, evaluation and implementation of a nonassociative model for geologic materials, International Journal of Plasticity, v. 5, p. 397-420, 1989.
- [35] DE DEUS, H.P., Um Procedimento para A Otimização de Forma Aplicado a Escoamento de Fluidos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 2002.
- [36] DE DEUS, H. P., Alves, M. K., Crema, F. L., A Finite Deformation Visco-Hypoelasticity Model. In: COBEM 2007, 2007, Brasília. 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007.
- [37] DE DEUS, H. P., Machado, G. C., Alves, M. K., A Viscoplastic Model for Finite Strain Response of Crushable Polymeric Foams. In: COBEM 2007, 2007, Brasília. 19th International Congress of Mechanical Engineering, 2007.
- [38] DIMAGGIO, F.L., SANDLER, L.S., Material models for granular soils, Journal of Engineering Mechanics, v. 97, p. 935-950, 1971.
- [39] DORAIVELU, A.M., GEGEL, H.L., GUNASEKERA, J.S., MALAS, J.C., MORGAN, J.T., A new yield function for compressible P/M materials, International Journal of Mechanical Sciences, v. 9/10, p. 527-535, 1984.
- [40] DROSDOV, A., Finite Elasticity and Viscoelasticity: A Course in non-linear Mechanics of Solids, World Scientific Publishing, 1996.
- [41] DRUCKER, D.C., GIBSON, R.E., HENKEL, D.J., Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity, Proceedings, ASCE, v. 81, p. 1-14, 1955.

- [42] ETEROVIC A. L., BATHE K. J., A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 30, p. 1099-1114, 1990.
- [43] FINDLEY, W. N., LAI, J. S., ONARAN, K., Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials (with a introduction to linear viscoelasticity), North-Holland series in: Applied Mathematics and Mechanics (eds. H. A. Lauwerier & W. T. Koiter), North-Holland, 1976.
- [44] FERRY, J.D., *Viscoelastic Properties of Polymers*, 3rd ed., Wiley & Sons, New York, 1980.
- [45] FLUGGE, W., *Viscoelasticity*, Springer-Verlag, New York, 1975.
- [46] GABRIEL G., BATHE K. J., Some computational issues in large strain elasto-plastic analysis, *Computers & Structures*, v. 56, p. 249-267, 1995.
- [47] GANGHOFFER, J.F., BRILLARD, A., SCHULTZ, J., A model of damaged adhesives, *European Journal of Mechanics – A/Solids*, v. 16, p. 19-52, 1997.
- [48] Gibson L.J., Ashby M.F., *Cellular Solids: Structure and Properties*, Cambridge University Press, 1997.
- [49] Gibson L.J., Ashby M.F., Zhang J. and Triantafillou T.C., Failure Surfaces for Cellular Materials under Multiaxial Loads – I Modelling, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 31, No. 9, pp. 635-663, 1989.
- [50] GOLDEN, J. M., GRAHAM, G. A. C., *Boundary Value Problems in Linear Viscoelasticity*, Springer-Verlag, 1988.
- [51] GOLDBERG, R. K., ROBERTS, G. D., GILAT, A., Implementation Of An Associative Flow Rule Including Hydrostatic Stress Effects Into The High Strain Rate Deformation Analysis of Polymer Matrix Composites, NASA/TM-2003-212382, 2003.
- [52] GILCHRIST A., MILLS N.J. - Compressive response of open cell foams. Part II: Initiation and evolution of crushing. *International Journal of Solids and Structures* 42 1381–1399, 2005.
- [53] GURSON, A.L., Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I - Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 99, p. 2-15, 1977.
- [54] GURTIN, M. E., *An Introduction to Continuum Mechanics*, New York, Academic Press, p. 264, 1981.
- [55] HALLQUIST, J.O., *Theoretical Manual of LsDyna - Livermore Software Technology Corporation*, 1998.

- [56] HANSSEN A.G., HOPPERSTAD O.S., LANGSETH H., ILSTAD H. - Validation of constitutive models applicable to aluminium foams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001.
- [57] Haupt, P., *Continuum Mechanics and Theory of Materials*, Springer, 2002.
- [58] HILL, R., Aspects of invariance in solid mechanics, *Advances in Applied Mechanics*, v. 18, p. 1-75, 1978.
- [59] HOFSTETTER, G., SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., A modified cap model: closest point solution algorithms, *International Journal of Computer & Structures*, v. 46, p. 203-214, 1993.
- [60] HUGHES, T. J. R., Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media, *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, v. 15, p. 1413-1418, 1980.
- [61] JÄGERING, S., DE BOER, R., BREUER, S., Elastoplastic compactation of metallic powders, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 43, p. 1563-1578, 2001.
- [62] JOHNSON, A. R., QUIGLEY, C. J., MEAD, J. L., Large Strain Viscoelastic Constitutive Models for Rubber, part i: Formulations, *Rubber Chemistry and Technology*, 67: 904-917, 1994.
- [63] Ko, W.L., Deformations of foamed elastomers. *J. Cell. Plast.* 1, 45-50, 1965.
- [64] KRAJCINOVIC, D., LEMAITRE, J., *Continuum Damage Mechanics - Theory and Applications, Courses and Lectures*, New York, Springer - Verlag, No. 295, p. 294, 1971.
- [65] Landro L., Sala G., Olivieri D., Deformation mechanisms and energy absorption of polystyrene foams for protective helmets, *Polymer Testing Vol.21*, pp. 217-228, 2001.
- [66] LEMAITRE, J., Micro-mechanics of crack initiation, *International Journal of Fracture*, v. 42, p.87-99, 1990.
- [67] LEMAITRE, J., *A Course on Damage Mechanics*, Germany, Springer-Verlag, p. 209, 1992.
- [68] LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L., *Mechanics of Solid Materials*, First paperback edition, Cambridge University Press, p. xxv + 556, 1994.
- [69] LEWIS, R.W., TRAN, D.V., Finite element approach to problems in particulate media with special reference to powder metal forming, *Bulletin Technical*, University of Istanbul, v. 47, p. 295-310, 1994.
- [70] LEWIS, R.W., KHOEI, A.R., Numerical modeling of large deformation in metal powder forming, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 159, p. 291-328, 1998.

- [71] LIU, G.R., TU, Z.H., An adaptive procedure based on background cells for meshless methods, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, p. 1923-1943, 2002.
- [72] LINZ, P., *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1985.
- [73] MACHADO, G. C., Método dos Elementos Livres de Galerkin Aplicado à Espumas Poliméricas, *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- [74] MALVERN, L. E., *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice Hall, p. xiv + 713, 1969.
- [75] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P. H., Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais, Rio de Janeiro, *Textos de Métodos Matemáticos no. 9*, IM-UFRJ, 1982
- [76] MELENK, J.M., BABUŠKA, I., The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, p. 289-314, 1996.
- [77] Miller A.K., *Unified Constitutive Equations for Creep and Plasticity*, Elsevier applied Science, 1987.
- [78] MATEGAAL J.C., PARKS, D.M., RICE, J.R., On the numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 4, p. 153-178, 1974.
- [79] NEEDLEMAN, A., Material rate dependent and mesh sensitivity in localization problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 67, p. 68-85, 1988.
- [80] ORTIZ, M., RADOVITZKY, R.A., REPETO, E.A., The computation of exponential and logarithmic mappings and their first and second linearizations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 1431-1441, 2001.
- [81] ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L. F., *Applied Functional Analysis*, Florida, CRC Press, 1996.
- [82] PERIC, D., On consistent stress rates in solids mechanics: Computational implications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 33, p. 799-817, 1992.
- [83] PERIC D., OWEN D. R. J., Honnor M. E., A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.94, p. 35-61, 1992.
- [84] PERIC D., OWEN D. R. J., Finite-element applications to the nonlinear mechanics of solids, *Reports on Progress in Physics*, v. 61, p. 1495-1574, 1998.

- [85] PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T., Numerical Recipes in Fortran 77: The art of scientific computing, Cambridge University Press, 1992.
- [86] REISMANN, H.; PAWLIK, P.S., Elasticity: Theory and Applications, John Wiley and Sons, 1980.
- [87] RIANDE, E., DIAZ-CALLEJA, R., PROLONGO, M.G., MASEGOSA, R.M., SALOM, C., Polymer Viscoelasticity : Stress and Strain in Practice, Marcel Dekker, 2000.
- [88] Roberts, A.P., Garboczi E.J., Elastic properties of model random three-dimensional open-cell solids, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 50, pp.33-55, 2002.
- [89] Roberts, A.P., Garboczi E.J., "Elastic moduli of model random three-dimensional closed-cell cellular solids", Acta Materialia, Vol.49, pp.189-197, 2001.
- [90] ROBOTNOV, Y.N., Creep rupture, International Congress Applied Mechanics, Springer, Berlin, 1969.
- [91] ROSCOE, K.H., BURLAND, J.B., On the generalized stress-strain behavior of wet clay, Engineering Plasticity, p. 535-609, 1968.
- [92] ROSSI, R., ALVES, M.K., An EFG method used to solve elastoplastic models by direct imposition of essential boundary conditions, Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, Giulianova, Italy, 2002.
- [93] SCHOFIELD, A., WROTH, C.P., Critical state soil mechanics. McGraw-Hill, London, 1968.
- [94] SHAW, S., Finite Element and Discrete Time Methods for Continuum Problems with Memory and Applications to Viscoelasticity — Thesis of Doctor, Department of Mathematics and Statistics, Brunel University, Uxbridge, 1993.
- [95] SHAW, S., WHITEMAN, J.R., Some Partial Differential Volterra Equation Problems Arising in Viscoelasticity — Equadif 9 Cd Rom, Brno, 1997, Proceedings, pp. 183-200.
- [96] SIMO, J.C., Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of infinitesimal theory, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 99, p. 61-112, 1992.
- [97] SIMO, J. C., ARMERO, F., Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 33, p. 1413-1449, 1992.
- [98] SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R., Computational Inelasticity, Interdisciplinary Applied Mathematics, v. 7 Springer, New York, p. 392, 1998.

- [99] SIMO, J.C., JU, J.W., Strain- and stress-based continuous damage model - Part I and II, *International Journal Solids Structures*, v. 23, p. 821-869, 1987.
- [100] SIMO, J.C., LAURSEN, T.A., An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction, *Computers and Structures*, v. 42, p. 97-116, 1992.
- [101] SIMO, J.C., RIFAI, S., A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 29, p. 1595-1638, 1990.
- [102] SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 31, p. 649-670, 1986.
- [103] SIMONE, A. E. and GIBSON, L. J., *Acta mater.*, 46(6), 2139, 1998.
- [104] SONG B., WEINONG W., CHEN W., DOU S., WINFRE N.A., KANG J.H. - Strain rate effects on elastic and early cell-collapse responses of a polystyrene foam. *International Journal of Impact Engineering* 21(2005) 509-521, 2004.
- [105] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., DUTKO, M., OWEN, D.R.J., Design of simple low order finite elements for large strain analysis of nearly incompressible solids, *International Journal of Solids and Structures*, v. 33, p. 3277-3296, 1996.
- [106] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J., Continuum modeling and numerical simulation of material damage at finite strains, *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 5, p. 311-384, 1998.
- [107] SOUZA NETO, E.A., PERIC, D., OWEN, D.R.J., Computational Plasticity: Small and Large Strain Finite Element Analysis of Elastic and Inelastic Solids, *Classroom Notes*, University College of Swansea, Wales, 2002.
- [108] SRIKANTH, A., ZABARAS, N., An updated Lagrangian finite element sensitivity analysis of large deformations using quadrilateral elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 52, p. 1131-1163, 2001.
- [109] ZABARAS, N., GANAPATHYSUBRAMANIAN, S., LI, Q., A continuum sensitivity method for the design of multi-stage metal forming processes, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 45, p. 325-358, 2003.
- [110] STROUBOULIS, T., BABUSKA, I., COPPS, K., The design and analysis of the generalized Finite element method, *Computer Methods Applied Mechanical Engineering*, v. 81, p. 43-69, 2000.
- [111] SWAN, C.C., SEO, Y.K., A smooth cap plasticity model for soils: Integration algorithm, parameter estimation and applications. *Tech. Rep. No. 2000-043*, Ctr. for Comp. Aided Des., University of Iowa, Iowa, 2000.

- [112] SZABÓ, B., BABUSKA, I., Finite Element Analysis, New York, John Wiley & Sons, p. 368, 1991.
- [113] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., Theory of Elasticity, 3^a ed., McGraw-Hill, New York, 1970.
- [114] TROXELL, G.E., DAVIS, H. E., KELLY, J. W., Composition and Properties of Concrete, second edition, McGraw Hill Civil Engineering series, 1968.
- [115] TVERGAARD, V., Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, International Journal of Fracture, v. 17, p. 389–407, 1981.
- [116] TVERGAARD, V., NEEDLEMAN, A., Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, Acta Metallurgica, v. 32, p. 157–169, 1984.
- [117] TRUESDELL, C. A., Mechanics of Solids II, Germany, Springer-Verlag, p.703, 1984.
- [118] TRUESDELL, C. A., Mechanics of Solids III, Germany, Springer-Verlag, p.647, 1984.
- [119] van der VEGT, A. K., From polymers to plastics, DUP Blue Print, Delft, The Netherlands, 2002.
- [120] WEBER, G., ANAND, L., Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 79, p. 173-202, 1990.
- [121] WIBERG, N.E., ABDULWAHAB, F., Error estimation with postprocessed finite element solutions, Computers and Structures, v. 64, p. 113-137, 1997.
- [122] WRIGGERS, P., VU, V.T., STEIN, E., Finite element formulation of large formulation impact-contact problems with friction, Computers & Structures, v. 37, p. 319-331, 1990.
- [123] XIAO, H., BRUHNS, O. T., MEYERS, A., Hypo-Elasticity Model Based upon the Logarithmic Stress Rate, Journal of Elasticity 47: 51–68, 1997.
- [124] XIAO, H., BRUHNS, O. T., MEYERS, A., Logarithmic Strain, Logarithmic Spin and Logarithmic Rate, Acta Mechanica 124, 89-105 (1997).
- [125] ZHANG, J., KIKUCHI, N., Li, V.C., YEE, A.F, and NUSHOLTZ, G.S., Constitutive Modeling of Polymeric Foam Material Subjected to Dynamic Crash Loading, Int. J. Impact Engng, Vol. 21 No. 5 , pp.369-386, 1998.
- [126] ZIENKIEWICZ, O.C., The Finite Element Method, 4rd edition, v. 1, New York, McGraw-Hill, p. xx + 648, 1977.
- [127] ZIENKIEWICZ, O.C., BORROMAND, B., ZHU, J.Z., Recovery procedures in error estimation and adaptivity Part I: Adaptivity in linear problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 176, p. 111-125, 1999.

- [128] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., The three R's of engineering analysis and error estimation and adaptivity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 82, p. 95-113, 1990.
- [129] ZIENKIEWICZ, O.C., ZHU, J.Z., Adaptivity and mesh generation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 32, p. 783-810, 1991.

Apêndice A

Fundamentação

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos e resultados importantes que servem direta ou indiretamente de base teórica para o desenvolvimento deste trabalho. Algumas demonstrações serão omitidas visando tornar a leitura mais corrente, porém serão devidamente referenciadas.

A.1 O Operador de Boltzmann

O modelo de viscoelasticidade abordado neste trabalho é baseado no princípio da *superposição de Boltzmann* que matematicamente é descrito pelo *operador de Boltzmann*. Para se chegar a esta definição, inicialmente define-se a *continuidade absoluta*.

Definição 17 *Seja $[a, b]$ um intervalo fechado e limitado de \mathbb{R} . Diz-se que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é absolutamente contínua em $[a, b]$ se $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que: se $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ é uma coleção finita de intervalos abertos e disjuntos em $[a, b]$ tal que*

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta, \quad (\text{A.1})$$

então

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon. \quad (\text{A.2})$$

Obsevação 18 *Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R} . Então, denota-se por $C^{ac}(\Omega)$ o conjunto das funções absolutamente contínuas em Ω .*

Lema 19 *Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ (espaço de dimensão finita), então $\phi \in C^{ac}$ é do tipo Heaviside ($\phi(t) = 0$, para $t < 0$) se e somente se existem um elemento $\phi^\circ \in \mathcal{N}$ e uma função localmente integrável $\dot{\phi} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{N}$ tal que*

$$\phi(t) = \phi^\circ + \int_0^t \dot{\phi}(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (\text{A.3})$$

em que o elemento ϕ° e a função $\dot{\phi}$ são unicamente determinados por

$$\phi^\circ = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t), \quad (\text{A.4})$$

e

$$\dot{\phi}(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (\text{A.5})$$

para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$. (ver [117] e [118].)

Definição 20 Seja $\phi \in C^{ac}$ como no lema anterior. Então, define-se o operador de Boltzmann $(\phi \odot)$ como o seguinte mapeamento linear

$$(\phi \odot f)(t) = \phi^\circ f(t) + \int_0^t \dot{\phi}(s) f(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.6})$$

para uma dada função f . (ver [117] e [118].)

Uma outra definição a ser destacada, embora não esteja relacionada com o operador de Boltzmann, é a de subdiferenciabilidade, muito útil no tratamento de funcionais em *análise convexa*

Definição 21 Seja N um espaço vetorial normado. Diz-se que uma função $f : N \rightarrow]-\infty, +\infty]$ é subdiferenciável em $u \in N$ se $f(u) < +\infty$ e $\exists u^* \in N^*$ (espaço dual de N) tal que:

$$f(v) \geq f(u) + \langle u^*, v - u \rangle, \quad \forall v \in N. \quad (\text{A.7})$$

Então u^* é dito ser um subgradiente de f no ponto u e o conjunto dos subgradientes de f em u é chamado de subdiferencial de f em u , sendo denotado por $\check{\partial}f(u)$. (ver [75])

A.2 Espaços de Funções

O método de Galerkin é uma ferramenta importantíssima para a aplicação do método de elementos finitos. O método de Galerkin permite a obtenção da formulação fraca do problema original, a qual exige "menos" regularidade da solução. O uso deste método necessita de algumas propriedades dos espaços de funções contínuas, espaços de *Banach*, espaços de *Hilbert* e espaços de *Sobolev*. Neste sentido as definições e resultados mais relevantes para este trabalho encontram-se a seguir, para maiores detalhes ver [81] e [1].

A.2.1 Espaços das Funções Contínuas

Seja \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos. Uma n -úpla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ em \mathbb{N}^n é chamado um multi-índice, e $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ é o comprimento de α . Assim define-se $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n}$ em que $\partial_j = \partial / \partial x_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Seja Ω um conjunto aberto em \mathbb{R}^n e $k \in \mathbb{N}$ então denota-se:

1. $C^k(\Omega)$ o conjunto de todas as funções u definidas em Ω com valores reais, tal que $\partial^\alpha u$ é contínua para todo α com $|\alpha| \leq k$;
2. $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$;
3. $C^k(\overline{\Omega})$ o conjunto de todas as funções $u \in C^k(\Omega)$, tal que $\partial^\alpha u$ pode ser estendida continuamente de Ω para $\overline{\Omega}$;
4. $C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\overline{\Omega})$.

Assumindo agora que Ω seja limitado em \mathbb{R}^n , então $C^k(\overline{\Omega})$ equipado com a norma

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{|\alpha| \leq k} \left\{ \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha u(x)| \right\}, \quad (\text{A.8})$$

é um espaço de Banach.

Definição 22 *Seja u definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Define-se o suporte de u como sendo o fecho do conjunto $\{x \in \Omega | u(x) \neq 0\}$, e denota-se $\text{supp}(u)$ para designá-lo. Se este subconjunto de Ω é compacto, então u é dita ter suporte compacto com respeito a Ω .*

Definição 23 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio para $k = 1, \dots$. $C_0^k(\Omega)$ denota o conjunto das funções $u \in C^k(\Omega)$ com suporte compacto em Ω . No caso $k = \infty$, denota-se $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$.*

A.2.2 Espaços das Funções Integráveis

Considerando agora funções reais definidas sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que são mensuráveis a Lebesgue, denota-se

$$\int_{\Omega} u(x) dx, \quad (\text{A.9})$$

a integral de Lebesgue de u sobre Ω .

Definição 24 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e $1 \leq p < \infty$, define-se o espaço $L_p(\Omega)$ como o conjunto das classes de equivalência de todas as funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|u|^p$ é integrável a Lebesgue sobre Ω . O espaço $L_p(\Omega)$ munido com a norma*

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A.10})$$

é um espaço de Banach. Em particular quando $p = 2$, o espaço $L_p(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \forall u, v \in L_2(\Omega), \quad (\text{A.11})$$

Teorema 25 *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, na norma acima descrita.*

Definição 26 *O supremo essencial de uma função u é o ínfimo do conjunto de todos os números reais M tal que $|u(x)| \leq M$ quase sempre em Ω , e denota-se por*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|; \quad (\text{A.12})$$

$$= \inf \{M \in \mathbb{R}_+ | \text{med} \{x \in \Omega | |u(x)| > M\} = 0\}. \quad (\text{A.13})$$

Assim para $p = \infty$, o espaço $L_\infty(\Omega)$ denota o conjunto das classes de equivalência das funções definidas sobre Ω que são mensuráveis a Lebesgue e seu módulo tem supremo essencial finito. O espaço $L_\infty(\Omega)$ equipado com a norma $\|u\|_{L_\infty(\Omega)}$ definida acima é um espaço de Banach.

Obsevação 27 *Pode-se mostrar que para $p > q$, tem-se*

$$L_\infty(\Omega) \subset \dots \subset L_p(\Omega) \subset \dots \subset L_q(\Omega) \subset \dots \subset L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega). \quad (\text{A.14})$$

A.2.3 Espaços de Sobolev

Definição 28 *Sejam $u, v \in L_1(\Omega)$ e α um multi-índice. Então v é a α -ésima derivada fraca de u , se e somente se*

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (\text{A.15})$$

em que

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}. \quad (\text{A.16})$$

Definição 29 *Seja um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W_p^k(\Omega)$ é definido como*

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) | \partial^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k\}. \quad (\text{A.17})$$

O espaço $W_p^k(\Omega)$, com a norma

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (\text{A.18})$$

para $1 \leq p < \infty$, e com a norma

$$\|u\|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (\text{A.19})$$

para $p = \infty$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$ também é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_{W_2^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L_2(\Omega)}, \forall u, v \in W_2^k(\Omega). \quad (\text{A.20})$$

Neste caso designa-se $W_2^k(\Omega)$ por $H^k(\Omega)$.

Teorema 30 $C^\infty(\Omega)$ é denso em $W_p^k(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, na norma anteriormente descrita.

Obsevação 31 Em muitos problemas na mecânica dos meios contínuos, pode-se definir o espaço

$$(H^k(\Omega))^n := H^k(\Omega) \times \dots \times H^k(\Omega), (n \text{ vezes}), \quad (\text{A.21})$$

o que induz a seguinte definição de norma

$$\|\mathbf{u}\|_{(H^k(\Omega))^n} := \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_{H^k(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^n \in (H^k(\Omega))^n. \quad (\text{A.22})$$

Pode-se também definir de forma análoga uma norma para $(W_p^k(\Omega))^n$.

A.3 Equações de Volterra

Faz-se necessário, nesse momento, uma abordagem informal sobre as *equações de Volterra*, que serão de grande relevância para o conteúdo desta proposta. Suponha, então, que para um $T > 0$ fixo, tem-se as funções $f(t) \in C([0, T])$ e $b(s, t) \in C(\{(s, t) | t \in [s, T]\})$, em que $b(s, t)$ satisfaz a condição de casualidade

$$b(s, t) \equiv 0, \quad \forall s > t. \quad (\text{A.23})$$

Então tem-se a *equação integral de Volterra de segundo tipo*

$$u(t) = f(t) + \int_0^t b(s, t)u(s)ds, \quad t \in [0, T], \quad (\text{A.24})$$

em que u é uma função desconhecida. Se esta função só aparece sob a integral, então tem-se uma *equação integral de Volterra de primeiro tipo*

$$f(t) = \int_0^t b(s, t)u(s)ds, \quad t \in [0, T]. \quad (\text{A.25})$$

É possível, também, que derivadas de u estejam presentes nas equações acima resultando então na *equação integrodiferenciável de Volterra*. Podem-se apresentar as seguintes formas

$$au(t) + \int_0^t b(s, t)u(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (\text{A.26})$$

a *equação elíptica de Volterra* para u ,

$$\rho u'(t) + au(t) + \int_0^t b(s, t)u(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (\text{A.27})$$

a *equação parabólica de Volterra* para u e

$$\rho u''(t) + au(t) + \int_0^t b(s, t)u(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T], \quad (\text{A.28})$$

a equação hiperbólica de Volterra para u .

A consistência (existência e unicidade de solução) do problema pode ser então atestada com o uso do teorema de *Lax-Milgram* e da *desigualdade de Gronwall contínua*, para maiores esclarecimentos ver [72] e [30].

Lema 32 (*Desigualdade de Gronwall Contínua*) *Seja u uma função não negativa e integrável em $\mathfrak{S} := [0, T]$ e v uma função não negativa e não decrescente também em \mathfrak{S} . Se existe uma constante não negativa C tal que $\forall t \in \mathfrak{S}$*

$$u(t) \leq v(t) + \int_0^t u(s) ds, \quad (\text{A.29})$$

então

$$u(t) \leq v(t) \exp(Ct) \quad (\text{A.30})$$

(ver [72]).

Assim segue o seguinte resultado, que atesta que o problema é bem posto

Teorema 33 *Seja U um espaço de Hilbert com a norma $||\cdot||$ e U' o seu dual com a norma $|||\cdot|||$. Para $T > 0$ seja $\mathfrak{S} := [0, T]$ e para quase todo $t \in \mathfrak{S}$ seja:*

1. $L(t; \cdot) : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear contínua tal que $\forall v \in U$

$$|L(t; v)| \leq C_f(t) \|v\|, \text{ com } C_f(t) \in L_\infty(\mathfrak{S}); \quad (\text{A.31})$$

2. $a(t; \cdot, \cdot) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coercitiva tal que $\forall w, v \in U$ e $t \in \mathfrak{S}$

$$|a(t; w, v)| \leq C_c(t) \|w\| \|v\|, \text{ com } C_c(t) \in L_\infty(\mathfrak{S}), \quad (\text{A.32})$$

e

$$a(t; v, v) \geq c_c(t) \|v\|^2, \text{ com } \inf_{t \in \mathfrak{S}} c_c(t) = \check{c}_c > 0, \quad (\text{A.33})$$

3. $b(t, s; \cdot, \cdot) : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coercitiva tal que $\forall w, v \in U$ e $t, s \in \mathfrak{S}$

$$|b(t, s, w, v)| \leq C_b(t, s) \|w\| \|v\|, \text{ com } C_b(t, s) \in L_\infty(\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}). \quad (\text{A.34})$$

Então existe um único $u \in L_\infty(\mathfrak{S}; U)$ que é a solução da equação de Volterra

$$a(t; u(t), v) = L(t; v) + \int_0^t b(t, s; u(s), v) ds, \quad \forall v \in U \text{ e } t \in \mathfrak{S} \quad (\text{A.35})$$

(ver [72]).

A.4 Noções de Mecânica do Contínuo

Faz-se necessária, neste momento, a introdução de algumas definições preliminares referentes a mecânica dos meios contínuos.

Definição 34 Um corpo simples é um conjunto aberto $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^3$. Uma configuração de \mathcal{B} é um mapeamento $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$. O conjunto de todas as configurações do corpo \mathcal{B} é denotado por $C(\mathcal{B})$.

Um corpo do ponto de vista físico é considerado como um conjunto de partículas, que pode ser visualizado através de suas configurações, i.e., as regiões do espaço tridimensional ocupadas em diferentes instantes. Seja \mathcal{B} um corpo, Ω_o denota a região do espaço ocupada pelo corpo no instante $t = 0$ e Ω_t denota a região do espaço ocupada pelo corpo no instante t . Note que, cada ponto espacial de uma configuração é ocupado por uma partícula. Um corpo consiste sempre das mesmas partículas e a configuração destas partículas variam no tempo.

Seja \mathcal{P} uma partícula de \mathcal{B} . Para a determinação do movimento de um corpo é necessário seguir a trajetória de cada partícula de \mathcal{B} e com a identificação de cada partícula \mathcal{P} de \mathcal{B} , aplicada a uma configuração de referência a qual cada partícula está associada assim como as posições ocupadas pelas partículas nesta configuração.

A.4.1 Movimento e Deformação de um Corpo \mathcal{B}

Definição 35 Um movimento de um corpo \mathcal{B} é uma curva em $C(\mathcal{B})$, isto é, um mapeamento $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t \in C(\mathcal{B})$. Para t fixo escreve-se $\varphi_t(\mathbf{x}_o) = \varphi(\mathbf{x}_o, t)$, $\mathbf{x}_o \in \mathcal{B}$.

Definição 36 Um movimento φ_t é dito ser regular se cada $\varphi_t(\mathcal{B})$ é um aberto e φ_t tem uma inversa.

O movimento do corpo \mathcal{B} é descrito pelo vetor posição $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t)$ do ponto \mathbf{x}_o , ocupado pela partícula \mathcal{P} de \mathcal{B} , a cada instante t

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t) = \varphi_t(\mathbf{x}_o) \quad (\text{A.36})$$

e desde que esta função vetorial descreve como o corpo \mathcal{B} modifica-se ou deforma-se de uma configuração para outra, ela é denotada de *função de deformação*.

Considere o instante fixo t . Se a posição \mathbf{x}_o de uma partícula \mathcal{P} na configuração de referência Ω_o está especificada, então A.36 fornece a posição \mathbf{x} de \mathcal{P} na configuração atual Ω_t

$$\Omega_t = \varphi(\Omega_o, t) = \varphi_t(\Omega_o). \quad (\text{A.37})$$

Descrição Lagrangeana ou Material

A descrição do movimento/deformação de uma partícula \mathcal{P} de Ω_o que ocupa a posição \mathbf{x}_o é uma variável independente denominada de descrição material. Aqui supõe-se que o mapeamento $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_o)$, para cada t , é um para um, i.e., que para cada t , o mapeamento inverso existe e é denotado por $\varphi_t^{-1}(\cdot)$. Então,

$$\mathbf{x}_o = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.38})$$

Descrição Espacial ou Euleriana

A descrição do movimento/deformação para uma partícula \mathcal{P} de Ω_t que ocupa a posição \mathbf{x} é uma variável independente, sendo esta descrição associada às seguintes expressões

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\varphi_t(\mathbf{x}_o), t) = \mathbf{v}_o(\mathbf{x}_o, t) \quad (\text{A.39})$$

ou

$$\mathbf{v}_o(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{v}_o(\varphi_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Deformação Não Homogênea

Considere um movimento genérico e o conjunto de partículas \mathcal{P} e \mathcal{Q} do corpo \mathcal{B} . Seja \mathbf{x}_o e $\mathbf{x}_o + d\mathbf{x}_o$ os vetores posição de \mathcal{P} e \mathcal{Q} respectivamente, na configuração de referência. Na configuração atual, \mathcal{P} e \mathcal{Q} ocupam as posições \mathbf{x} e $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ respectivamente. Então tem-se para estas partículas

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o, t) \quad (\text{A.40})$$

e

$$\mathbf{x} + d\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{x}_o + d\mathbf{x}_o, t). \quad (\text{A.41})$$

Considerando que, para cada t , o mapeamento $\varphi_t(\cdot)$ seja suave, pode-se expandir A.41 em uma série de Taylor e obter

$$x_i + dx_i = \varphi_i(\mathbf{x}_o, t) + \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_o, t)}{\partial x_{oj}} dx_{oj} + \mathcal{O}(dx_{oj}^2), \quad (\text{A.42})$$

na qual

$$\lim_{dx_{oj} \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(dx_{oj}^2)}{dx_{oj}} = 0. \quad (\text{A.43})$$

Subtraindo A.42 de A.40, e desprezando os termos de ordem mais altas, tem-se

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_o, t)}{\partial x_{oj}} dx_{oj}, \quad (\text{A.44})$$

que pode ser escrito de forma compacta

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t) d\mathbf{x}_o, \quad (\text{A.45})$$

em que

$$F(\mathbf{x}_o, t)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x}_o, t)}{\partial x_{oj}} \quad (\text{A.46})$$

ou

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t) = \nabla_{\mathbf{x}_o} \varphi_t(\mathbf{x}_o) = \nabla \varphi_t(\mathbf{x}_o), \quad (\text{A.47})$$

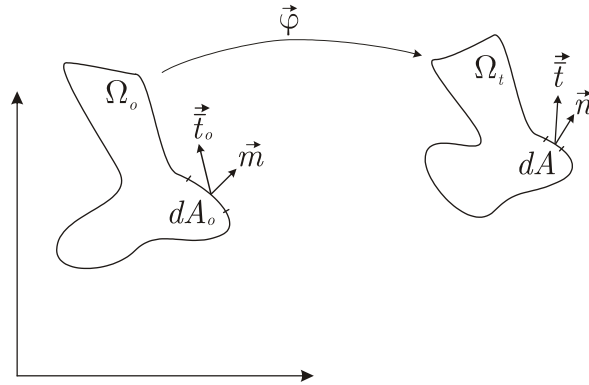
com \mathbf{F} denotando o gradiente da função deformação. Formalmente tem-se

Definição 37 Seja $\varphi_t : \mathcal{B} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma configuração C^1 . A tangente de φ_t é denotada por \mathbf{F} e é chamada de gradiente de deformação de φ_t . Assim $\mathbf{F}(\mathbf{x}_o) : \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{T}_{\varphi(\mathbf{x}_o)}S$ é uma transformação linear para cada $\mathbf{x}_o \in \mathcal{B}$, em que $\mathbf{T}_Y(\Omega)$ designa o espaço tangente a Ω em $Y \in \Omega$. Sendo \mathbf{x}_o^a e \mathbf{x}^a denotando sistemas de coordenadas em \mathcal{B} e S , respectivamente. Então a matriz $\mathbf{F}(\mathbf{x}_o)$ com respeito as bases $\mathbf{e}_a(\mathbf{x}_o)$ e $\mathbf{e}_a(\mathbf{x})$, em que $\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_o)$, é dado por

$$F^a(\mathbf{x}_o) = \frac{\partial \varphi_t^a}{\partial \mathbf{x}_o^a}(\mathbf{x}_o), \quad (\text{A.48})$$

ou mais concisamente no caso de um movimento $\varphi(\mathbf{x}_o, t)$ tem-se

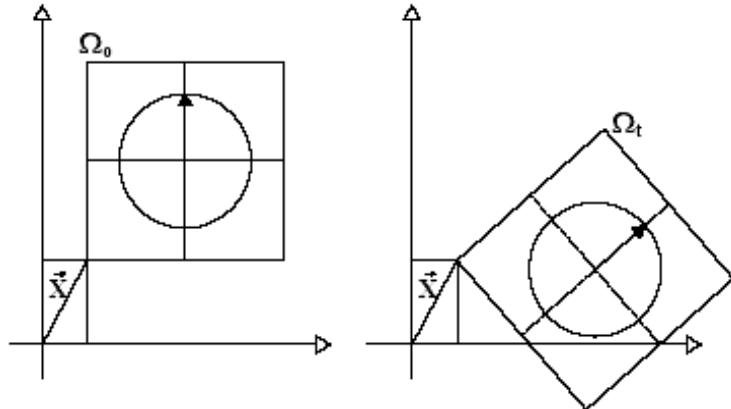
$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}_o} \varphi(\mathbf{x}_o, t) = \nabla \varphi_t(\mathbf{x}_o). \quad (\text{A.49})$$



Decomposição da Deformação

A deformação pode ser decomposta como sendo a composição de uma deformação pura seguida de uma rotação pura.

- **Rotação Pura:** Ocorre quando, no movimento de um corpo, cada linha de um elemento do corpo não sofre alteração em seu tamanho, somente uma alteração na sua orientação, como mostra a figura abaixo.



O movimento/deformação representando uma rotação pura tem a seguinte forma:

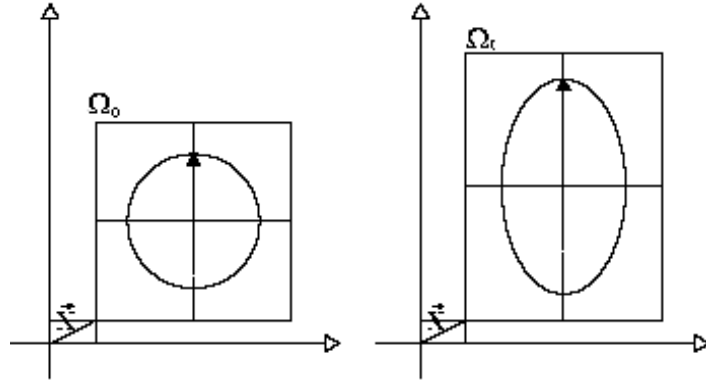
$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [\mathbf{R}(t)]\mathbf{x}_o \\ x_i &= R_{ij}x_{o_j}\end{aligned}\tag{A.50}$$

sendo, $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, não dependente de \mathbf{x}_o , e tal que :

$$[\mathbf{R}]^T[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{I}].\tag{A.51}$$

Note que $\det[\mathbf{R}] = \pm 1$, quando $\det[\mathbf{R}] = 1$ a rotação é dita ser própria. No caso em que $\det[\mathbf{R}] = -1$ temos uma reflexão, i.e., a deformação não representa uma rotação pura.

- **Deformação Pura:** Ocorre quando, no movimento de um corpo, cada linha de um elemento do corpo sofre alteração em seu tamanho, sem uma alteração na sua orientação.



Um movimento/deformação homogênea é pura quando tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= [\mathbf{U}(t)]\mathbf{x}_o \\ x_i &= U_{ij}x_{o_j}\end{aligned}\tag{A.52}$$

sendo, $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$, não dependente de \mathbf{x}_o , e tal que :

$$[\mathbf{U}(t)] = [\mathbf{U}(t)]^T.\tag{A.53}$$

Note que, como \mathbf{U} é simétrico, \mathbf{U} é diagonalizável e $\det(\mathbf{U}) > 0$. Esta forma de mapeamento de deformação tem a propriedade de que se existe uma linha de elementos \mathbf{d}_o em Ω_o , a qual é estirada, mas não rotacionada dentro do estado \mathbf{d} na configuração atual Ω , tem-se,

$$\mathbf{d} = [\mathbf{U}]\mathbf{d}_o = \lambda\mathbf{d}_o\tag{A.54}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}[\mathbf{U}]\mathbf{d}_o &= \tilde{\lambda}[\mathbf{I}]\mathbf{d}_o \\ 0 &= ([\mathbf{U}] - \tilde{\lambda}[\mathbf{I}])\mathbf{d}_o\end{aligned}\tag{A.55}$$

sendo \mathbf{d}_o o vetor próprio e $\tilde{\lambda}$ o valor próprio. Os elementos de linha \mathbf{d}_o na direção de um vetor próprio são estendidos de $\tilde{\lambda}$ e não sofrem rotação.

Decomposição Polar da Deformação

Um gradiente de deformação genérica pode ser decomposto como:

a) uma deformação/estiramento puro seguida de uma rotação pura:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (\text{A.56})$$

b) uma rotação pura seguida de uma deformação/estiramento puro:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (\text{A.57})$$

sendo:

\mathbf{R} — tensor rotação;

\mathbf{U} e \mathbf{V} - tensores alongação (estiramentos) direito e esquerdo respectivamente.

A noção de superposição de uma rotação e um estiramento como usado em elasticidade linear não é usada em problemas de grandes deformações.

Obsevação 38 *Em grandes deformações, duas deformações devem ser combinadas seqüencialmente por composição, i.e., tem-se uma decomposição multiplicativa, já em pequenas deformações, as deformações são combinadas por adição, i.e., tem-se uma decomposição aditiva.*

Definição 39 *O tensor deformação de Green, ou de Cauchy-Green a direita, \mathbf{C} é definido por:*

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}_o) : \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B}, \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}_o) := \mathbf{F}(\mathbf{x}_o)^T \mathbf{F}(\mathbf{x}_o), \quad (\text{A.58})$$

ou mais concisamente $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$.

Definição 40 *Seja $\varphi_t : \mathcal{B} \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma configuração regular C^1 . O tensor deformação de Finger, ou Cauchy-Green a esquerda, \mathbf{B} é definido por:*

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) : \mathbf{T}_{\mathbf{x}}\varphi_t(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{x}}\varphi_t(\mathcal{B}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) := \mathbf{F}(\mathbf{x}_o)\mathbf{F}(\mathbf{x}_o)^T, \quad (\text{A.59})$$

em que $\mathbf{x}_o = \varphi_t^{-1}(\mathbf{x})$, ou mais concisamente $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$.

Lema 41 *Seja \mathcal{V} um espaço de dimensão finita com produto interno, e seja $\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, uma transformação linear simétrica positiva definida, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ e $\langle \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{v} \neq \vec{0}$. Então existe uma única transformação linear simétrica positiva definida $\mathbf{B} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.*

Dem. Seja então $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ a base ortonormal de autovetores de \mathbf{A} , e seja $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ os respectivos autovalores. Então $\mathbf{A}\Phi_i = \lambda_i\Phi_i$, logo $\langle \mathbf{A}\Phi_i, \Phi_i \rangle = \lambda_i \|\Phi_i\|^2 > 0$. Definindo agora \mathbf{B} por

$\mathbf{B}\Phi_i = \sqrt{\lambda_i}\Phi_i$, daí $\mathbf{B}^2\Phi_i = \mathbf{A}\Phi_i = \lambda_i\Phi_i$, isto mostra a existência de \mathbf{B} . A unicidade é de fácil verificação. ■

Definição 42 *Sejam φ_t regular e \mathbf{C} e \mathbf{B} como definidos anteriormente. Sejam agora \mathbf{U} e \mathbf{V} as únicas transformações lineares simétricas positivas definidas tais que $\mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ e $\mathbf{V}^2 = \mathbf{B}$, em que para cada $\mathbf{x} \in S$ tem-se $\mathbf{V}(\mathbf{x}) : \mathbf{T}_{\mathbf{x}}S \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{x}}S$ e para cada $\mathbf{x}_o \in \mathcal{B}$ tem-se $\mathbf{U}(\mathbf{x}_o) : \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B}$.*

Proposição 43 *Seja φ_t regular. Para cada $\mathbf{x}_o \in \mathcal{B}$ existe uma transformação ortogonal $\mathbf{R}(\mathbf{x}_o) : \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}S$, ou seja, $\mathbf{R}(\mathbf{x}_o)^T \mathbf{R}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{I}$ (identidade em $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}\mathcal{B}$) e $\mathbf{R}(\mathbf{x}_o)\mathbf{R}(\mathbf{x}_o)^T = \mathbf{I}^*$ (identidade em $\mathbf{T}_{\mathbf{x}_o}S$), tal que*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{R} \circ \mathbf{U}(\mathbf{x}_o); \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{V} \circ \mathbf{R}(\mathbf{x}_o), \quad (\text{A.61})$$

e cada uma destas decomposições é única.

Dem. Definindo-se $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \Rightarrow \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}$, por outro lado $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-2}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^T = \mathbf{I}^*$. Suponha agora que $\exists \mathbf{U}_1, \mathbf{R}_1$ tais que $\mathbf{F} = \mathbf{R}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{R}\mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{U}_1^2 \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{U}_1$, pelo lema anterior, daí conclui-se que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$. O raciocínio é análogo para verificar a existência e unicidade da decomposição $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$, e de onde tem-se $\mathbf{U} = \mathbf{R}^T\mathbf{V}\mathbf{R}$. ■

Obsevação 44 (Algoritmo da Decomposição Polar) *Seja dado $\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{U} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{\frac{1}{2}}$, e sejam $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ seus autovetores e $\{\Lambda_i\}_{i=1}^n$ os respectivos autovalores. Assim seja $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi}$, em que $\mathbf{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$, logo $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n\} \Rightarrow \mathbf{U} := \mathbf{\Phi}(\mathbf{\Lambda})^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Phi}^T \Rightarrow \mathbf{R} := \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ e $\mathbf{V} := \mathbf{R}\mathbf{R}^T$.*

Os resultados acima a respeito da decomposição polar permitem dizer que os tensores \mathbf{U} e \mathbf{V} são calculados a partir dos tensores \mathbf{C} e \mathbf{B} chamados tensores de Cauchy-Green direito e esquerdo, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Todavia, desde que $\varphi_t(\cdot)$ seja inversível e suave, tem-se

$$d\mathbf{x}_o = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)^{-1} d\mathbf{x}, \quad (\text{A.63})$$

no qual

$$F^{-1}(\mathbf{x}, t)_{ij} = \frac{\partial \varphi_i^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \quad (\text{A.64})$$

ou, de um modo compacto,

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \nabla [\varphi_t^{-1}(\mathbf{x})]. \quad (\text{A.65})$$

Note ainda que

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \frac{d}{dt} \{d\mathbf{x}\} = \frac{d}{dt} \{\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t) d\mathbf{x}_o\} \\ &= \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_o, t) d\mathbf{x}_o, \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

então para cada t

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} + \mathcal{O}(d\mathbf{x}^2) \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Agora, desprezando os termos de alta ordem, tem-se

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (\text{A.68})$$

Definindo

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{A.69})$$

pode-se escrever

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.70})$$

Igualando A.70 com A.66 e usando A.63, implica

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} d\mathbf{x} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}, \quad (\text{A.71})$$

i.e.

$$\left[\mathbf{L} - \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (\text{A.72})$$

Como $d\mathbf{x}$ é arbitrário, de A.72 obtem-se

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \quad (\text{A.73})$$

equivalentemente,

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F} \quad (\text{A.74})$$

ou de um outro modo

Lema 45 *Seja, então, o gradiente do vetor velocidade espacial $(\mathbf{L}(\mathbf{x}, t))$ definido da seguinte forma*

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) := \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.75})$$

Então para φ_t regular tem-se:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)^{-1}. \quad (\text{A.76})$$

Dem. Tem-se então

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_o, t); \\ &= \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial \mathbf{x}_o} \frac{\partial \mathbf{x}_o}{\partial \mathbf{x}} + \underbrace{\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varphi}}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \mathbf{x}}}_{\text{tensor nulo}}; \\ &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}.\end{aligned}$$

■

Pode-se definir agora a taxa de deformação (\mathbf{D}) como:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) := \frac{\mathbf{L}^T + \mathbf{L}}{2}; \quad (\text{A.77})$$

$$= \text{sim}(\mathbf{L}). \quad (\text{A.78})$$

A.4.2 Leis de Conservação

Conservação de massa

Seja a massa de um corpo \mathcal{B} dada, na configuração inicial, por

$$m = \int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o, \quad (\text{A.79})$$

e na configuração atual por

$$m = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega_t. \quad (\text{A.80})$$

Desde que a massa do corpo seja conservada

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o = \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega_t. \quad (\text{A.81})$$

Todavia, do cálculo integral, por uma mudança de variáveis da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, obtem-se

$$d\Omega_t = \det[\mathbf{F}] d\Omega_o \quad (\text{A.82})$$

e como consequência de A.80 tem-se

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega_t = \int_{\Omega_o} \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o. \quad (\text{A.83})$$

Substituindo A.83 em A.81, tem-se

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o = \int_{\Omega_o} \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o \quad (\text{A.84})$$

i.e.

$$\int_{\Omega_o} \rho_o(\mathbf{x}_o) - \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)] d\Omega_o = 0. \quad (\text{A.85})$$

Desde que Ω_o é arbitrário, então:

$$\rho_o(\mathbf{x}_o) = \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) \det[\mathbf{F}(\mathbf{x}_o, t)], \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ e instante } t. \quad (\text{A.86})$$

Denotando

$$J = \det(\mathbf{F}), \quad (\text{A.87})$$

pode-se reescrever A.86 como

$$\rho_o(\mathbf{x}_o) = \rho(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) J(\mathbf{x}_o, t). \quad (\text{A.88})$$

Conservação do Momento Linear

Um modelo genérico, no método do estado local, é caracterizado pela existência de uma energia livre específica, da forma:

$$\Psi := \Psi(\mathbf{F}, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{x}), \quad (\text{A.89})$$

em que θ representa a temperatura e \mathbf{g} representa o gradiente de temperatura. Disto seguem então as definições, supondo $\boldsymbol{\varphi}_t$ regular e Ψ suficientemente suave em seu domínio

Definição 46 *O tensor tensão de Cauchy (σ) é definido da seguinte forma:*

$$\sigma := \rho_o \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \quad (\text{A.90})$$

em que ρ_o é a densidade na configuração de referência

$$\mathbf{J} := \det(\mathbf{F}); \quad (\text{A.91})$$

$$= \frac{\rho_o}{\rho}, \quad (\text{A.92})$$

sendo ρ a densidade na configuração atual.

Obsevação 47 *Note que $\mathbf{J} > 0$, para $\boldsymbol{\varphi}_t$ regular.*

A força resultante que atua num corpo \mathcal{B} no instante t é igual à taxa do momento linear deste corpo (segunda lei de Newton), dado neste mesmo instante t . Considere as seguintes forças atuantes:

- As forças de corpo $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ - por unidade de massa

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t \quad (\text{A.93})$$

- As forças superficiais $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ - devido à trações prescritas externamente e suporte de reações

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.94})$$

com

$$\int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) dA = \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA. \quad (\text{A.95})$$

Assim, a lei de conservação de momento linear pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t. \quad (\text{A.96})$$

Porém, do teorema da divergência tem-se

$$\int_{\partial\Omega_t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA = \int_{\Omega_t} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t})] d\Omega_t. \quad (\text{A.97})$$

Então, substituindo A.97 em A.96, tem-se

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \text{div} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{t})] d\Omega_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) d\Omega_t. \quad (\text{A.98})$$

Contudo,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{x}} d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_o} \rho \dot{\mathbf{x}} J d\Omega_o; \quad (\text{A.99})$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_o} \rho_o \dot{\mathbf{x}} d\Omega_o; \quad (\text{A.100})$$

$$= \int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{\mathbf{x}} d\Omega_o;$$

$$= \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{x}} d\Omega,$$

logo

$$\int_{\Omega_t} [\rho \mathbf{b} + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] - \rho \ddot{\mathbf{x}}] d\Omega_t = 0. \quad (\text{A.101})$$

Agora, desde que Ω_t é arbitrária, então

$$\rho \mathbf{b} + \text{div} [\boldsymbol{\sigma}] - \rho \ddot{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{para } \forall \mathbf{x} \in \Omega_t \text{ e tempo } t. \quad (\text{A.102})$$

Relação Entre Os Vetores Normais

Considere o movimento de deformação com o vetor área $d\mathbf{A}_o = dA_o \mathbf{n}_o$, em que $d\mathbf{A}_o = d\mathbf{x}_o \times d\mathbf{y}_o = dA_o \mathbf{n}_o$, com $\|\mathbf{n}_o\| = 1$ e $dA_o = \|d\mathbf{x}_o \times d\mathbf{y}_o\|$. Note que,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{x}_o \quad (\text{A.103})$$

e

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F} d\mathbf{y}_o. \quad (\text{A.104})$$

Assim, o vetor área deformada $d\mathbf{A}$ é dado por:

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{x} \times d\mathbf{y} = \mathbf{n} dA \quad (\text{A.105})$$

com $\|\mathbf{n}\| = 1$ e $dA = \|d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}\|$.

Seja $d\mathbf{z}_o$ um vetor arbitrário em Ω_o . Então, na configuração deformada, tem-se:

$$d\mathbf{z} = \mathbf{F} d\mathbf{z}_o. \quad (\text{A.106})$$

Porém, o elemento de volume $d\Omega_o$, determinado por

$$d\Omega_o = d\mathbf{z}_o \cdot d\mathbf{A}_o = d\mathbf{z}_o \cdot d\mathbf{x}_o \times d\mathbf{y}_o, \quad (\text{A.107})$$

é mapeado para:

$$d\Omega_t = d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{A} = d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{x} \times d\mathbf{y}. \quad (\text{A.108})$$

Efetuada uma mudança de variáveis $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, tem-se

$$d\Omega_t = \det[\mathbf{F}] d\Omega_o. \quad (\text{A.109})$$

Consequentemente,

$$d\mathbf{z} \cdot d\mathbf{A} = \det[\mathbf{F}] d\mathbf{z}_o \cdot d\mathbf{A}_o \quad (\text{A.110})$$

$$\mathbf{F} d\mathbf{z}_o \cdot \mathbf{n} dA = \det[\mathbf{F}] d\mathbf{z}_o \cdot \mathbf{n}_o dA_o \quad (\text{A.111})$$

$$d\mathbf{z}_o \cdot \{\mathbf{F}^T \mathbf{n} dA - \det[\mathbf{F}] \mathbf{n}_o dA_o\} = 0, \quad (\text{A.112})$$

o que fornece

$$\mathbf{F}^T \mathbf{n} dA = \det[\mathbf{F}] \mathbf{n}_o dA_o \quad (\text{A.113})$$

ou

$$\mathbf{n} dA = \det[\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o. \quad (\text{A.114})$$

Considere o problema cuja equação de movimento é definida em A.102 e que está definida na configuração atual, i.e., em Ω_t . Esta equação de equilíbrio pode ser descrita de forma análoga na configuração de referência pelo uso do primeiro e segundo tensores tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} e \mathbf{S} .

Definição de \mathbf{P} e \mathbf{S}

O primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} fornece a força atual $d\mathbf{f}$ em um elemento de área deformado dA , que é estimada em um elemento de área não deformada dA_o , e expressa a força em termos da normal \mathbf{n}_o de dA_o em \mathbf{x}_o em que $d\mathbf{f}$ é a força atuando em \mathbf{x} no instante t na configuração atual Ω_t . Então,

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.115})$$

O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} fornece a força $d\tilde{\mathbf{f}}$ relacionada a força $d\mathbf{f}$ da mesma forma que o vetor material $d\mathbf{x}_o$ em \mathbf{x}_o estão relacionados pela deformação com o vetor espacial correspondente $d\mathbf{x}$ em \mathbf{x} , i.e.,

$$d\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f}. \quad (\text{A.116})$$

Então

$$\mathbf{S} \mathbf{n}_o dA_o = d\tilde{\mathbf{f}}, \quad (\text{A.117})$$

ou

$$\mathbf{S} \mathbf{n}_o dA_o = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o \quad (\text{A.118})$$

i.e.

$$[\mathbf{S} - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}] \mathbf{n}_o dA_o = 0, \quad (\text{A.119})$$

que é válida para qualquer que seja a direção $\mathbf{n}_o dA_o$. Logo

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} \quad (\text{A.120})$$

ou

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S}. \quad (\text{A.121})$$

Usando a relação entre os vetores normais da configuração de referência e da configuração atual, tem-se

$$\mathbf{n} dA = \det [\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o. \quad (\text{A.122})$$

Então pode-se agora relacionar o primeiro e o segundo tensores tensão de Piola-Kirchhoff com o tensor tensão de Cauchy. Assim

$$\mathbf{S} \mathbf{n}_o dA_o = \det [\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o \quad (\text{A.123})$$

i.e.

$$[\mathbf{S} - \det [\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}] \mathbf{n}_o dA_o = 0. \quad (\text{A.124})$$

Como o resultado acima é válido para qualquer que seja a direção \mathbf{n}_o , pode-se concluir que

$$\mathbf{S} = \det [\mathbf{F}] \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.125})$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det [\mathbf{F}]} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (\text{A.126})$$

Porém como $\det [\mathbf{F}] = \frac{\rho_o}{\rho}$, pode-se escrever:

$$\left(\frac{\mathbf{S}}{\rho_o} \right) = \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.127})$$

ou

$$\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) = \mathbf{F} \left(\frac{\mathbf{S}}{\rho_o} \right) \mathbf{F}^T. \quad (\text{A.128})$$

Por outro lado $d\mathbf{f} = \mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA$, então

$$\mathbf{P} \mathbf{n}_o dA_o = \det [\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_o dA_o \quad (\text{A.129})$$

i.e.

$$[\mathbf{P} - \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}] \mathbf{n}_o dA_o = 0 \quad (\text{A.130})$$

que implica em

$$\mathbf{P} = \det[\mathbf{F}] \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (\text{A.131})$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det[\mathbf{F}]} \mathbf{P} \mathbf{F}^T. \quad (\text{A.132})$$

Formalmente tem-se então

Definição 48 *O primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff (\mathbf{P}) é definido da seguinte forma:*

$$\mathbf{P} := \rho_o \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}; \quad (\text{A.133})$$

$$= \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (\text{A.134})$$

Definição 49 *O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff (\mathbf{S}) é definido como segue:*

$$\mathbf{S} := \rho_o^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}; \quad (\text{A.135})$$

$$= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}. \quad (\text{A.136})$$

Equação de Equilíbrio na Configuração de Referência

A equação de movimento definida na configuração de referência é oriunda da condição com que o vetor resultante das forças externas atua no material em Ω_t , que inicialmente é Ω_o em $t = 0$, é igual à taxa de variação temporal do momento linear. Então, na configuração atual Ω_t , tem-se

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} d\Omega_t + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t} dA = \int_{\Omega_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} d\Omega_t, \quad (\text{A.137})$$

em que $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ é a tração superficial aplicada na fronteira $\partial\Omega_t$. Note que,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) dA &= \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dA \\ &= \mathbf{P}(\mathbf{x}_o, t) \mathbf{n}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o \\ &= \mathbf{t}_o(\mathbf{x}_o, t) dA_o \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

e

$$\rho(\mathbf{x}, t) d\Omega = \rho_o(\mathbf{x}_o) d\Omega_o. \quad (\text{A.139})$$

Porém, a força de corpo por unidade de massa, pode ser expressa na configuração de referência como

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) = \mathbf{b}_o(\mathbf{x}_o, t). \quad (\text{A.140})$$

O campo de deslocamento é definido por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o \quad (\text{A.141})$$

e o gradiente do campo de deslocamento por

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{x} - \nabla \mathbf{x}_o, \quad (\text{A.142})$$

i.e.

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{I}, \quad (\text{A.143})$$

ou

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}. \quad (\text{A.144})$$

A descrição Euleriana ou espacial do campo de deslocamento é dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o), t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) \quad (\text{A.145})$$

ou

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_o, t) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.146})$$

Considerando a mudança de variáveis $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}_o)$, a equação do momento linear pode ser escrita na configuração de referência como:

$$\int_{\Omega_o} \rho_o \mathbf{b}_o \, d\Omega_o + \int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P} \mathbf{n}_o \, dA_o = \int_{\Omega_o} \rho_o \ddot{\mathbf{x}} \, d\Omega. \quad (\text{A.147})$$

Aplicando o teorema da divergência

$$\int_{\partial\Omega_o} \mathbf{P} \mathbf{n}_o \, dA_o = \int_{\Omega_o} \text{div} [\mathbf{P}] \, d\Omega_o, \quad (\text{A.148})$$

tem-se

$$\int_{\Omega_o} \{\rho_o \mathbf{b}_o + \text{div} [\mathbf{P}] - \rho_o \ddot{\mathbf{x}}\} \, d\Omega_o = 0. \quad (\text{A.149})$$

Como este resultado é válido para qualquer parte do corpo, então pode-se escrever

$$\text{div} [\mathbf{P}] + \rho_o \mathbf{b}_o = \rho_o \ddot{\mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ no instante } t, \quad (\text{A.150})$$

que é a equação de equilíbrio na configuração inicial (referência) escrita em função do primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff. Uma outra forma de se escrever esta equação é em termos do segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff. Lembrando que $\mathbf{P} = \mathbf{FS}$ e $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}}$, pode-se escrever

$$\text{div} [\mathbf{FS}] + \rho_o \mathbf{b}_o = \rho_o \ddot{\mathbf{u}}, \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ no instante } t. \quad (\text{A.151})$$

ou em termos das componentes

$$\frac{\partial (F_{IK} S_{KJ})}{\partial \mathbf{x}_{o_j}} + \rho_o b_{oI} = \rho_o \ddot{u}_I, \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Omega_o \text{ no instante } t. \quad (\text{A.152})$$

Obsevação 50 *Note ainda que para o tensor tensão de Cauchy tem-se $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$, e de A.125, conclui-se que $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$, porém $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$.*

Em adição às definições anteriores, tem-se ainda duas outras representações de tensões de relativa importância.

Definição 51 *O tensor tensão de Kirchhoff (τ), definido por:*

$$\tau := \rho_o \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^{-T}; \quad (\text{A.153})$$

$$= \mathbf{P} \mathbf{F}^{-T}; \quad (\text{A.154})$$

$$= \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.155})$$

Definição 52 *O tensor tensão rotacionado ($\bar{\tau}$), definido por:*

$$\bar{\tau} := \mathbf{R}^T \tau \mathbf{R}, \quad (\text{A.156})$$

associado ao tensor tensão de Kirchhoff.

A.4.3 O Modelo de Hencky

O modelo de Hencky para hiperelasticidade é baseado numa extensão da medida de deformação finita do caso linear elástico padrão. Este modelo foi proposto por Hencky, em 1938, com a finalidade de modelar borrachas vulcanizadas. O tensor deformação proposto \mathbf{E} , baseado na formulação Lagrangeana, pode ser definido como segue:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_o, t) := \frac{1}{2} \ln (\mathbf{C}(\mathbf{x}_o, t)); \quad (\text{A.157})$$

$$= \ln (\mathbf{U}(\mathbf{x}_o, t)). \quad (\text{A.158})$$

Recordando que \mathbf{U} e \mathbf{V} são simétricas positivas definidas, pode-se proceder a decomposição espectral das mesmas:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_o, t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Lambda_i} (\Phi_i \otimes \Phi_i); \quad (\text{A.159})$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\tilde{\Lambda}_i} (\boldsymbol{\eta}_i \otimes \boldsymbol{\eta}_i), \quad (\text{A.160})$$

em que $\{\Phi_i\}_{i=1}^n$ e $\{\Lambda_i\}_{i=1}^n$ são os autopares de \mathbf{C} , e $\{\boldsymbol{\eta}_i\}_{i=1}^n$ e $\{\tilde{\Lambda}_i\}_{i=1}^n$ são os autopares de \mathbf{B} .

A.4.4 Pares Conjugados de Tensão-Deformação

Segundo o trabalho proposto de Hill ([58]), os pares de tensão-deformação (pares conjugados) devem ser tais que o trabalho específico (por unidade de massa) \dot{W} da tensão seja invariante

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}; \quad (\text{A.161})$$

$$= \frac{1}{\rho_o} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}; \quad (\text{A.162})$$

$$= \frac{1}{\rho_o} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}; \quad (\text{A.163})$$

$$= \frac{1}{2\rho_o} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}}; \quad (\text{A.164})$$

$$\vdots$$

O tensor tensão rotacionado associado ao tensor tensão de Kirchhoff ($\bar{\boldsymbol{\tau}}$) forma um par conjugado tensão-deformação com a medida de deformação proposta por Hencky (\mathbf{E}), supondo que o material seja isotrópico ou seja

$$\dot{W} = \frac{1}{\rho_o} \bar{\boldsymbol{\tau}} : \dot{\mathbf{E}}; \quad (\text{A.165})$$

$$= \frac{1}{\rho_o} \left((\mathbf{R}^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}) : \frac{\partial}{\partial t} (\ln(\mathbf{U})) \right). \quad (\text{A.166})$$

A.5 Noções Sobre o Método de Elementos Finitos

Este tópico apresenta uma pequena coletânea de definições e observações a respeito do método de elementos finitos.

Definição 53 *Uma forma bilinear $a(.,.)$ em um espaço linear normado \mathcal{L} é dita ser limitada (ou contínua) se $\exists C < \infty$ t.q.*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{\mathcal{L}} \|v\|_{\mathcal{L}}, \forall u, v \in \mathcal{L}.$$

Definição 54 *Uma forma bilinear $a(.,.)$ em um espaço linear normado \mathcal{L} é dita ser coerciva em $V \subset \mathcal{L}$ se $\exists \alpha > 0$ t.q.*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{\mathcal{L}}^2, \forall v \in \mathcal{L}.$$

Teorema 55 (Lax-Milgram) *Dado um espaço de Hilbert (V) , um bilinear contínuo e coercivo $a(.,.)$ e um funcional linear contínuo $l \in V'$, então $\exists! u \in V$ t.q.*

$$a(u, v) = l(v), \forall v \in V.$$

Dem. Ver [19]. ■

Teorema 56 (Ritz-Galerkin) *Seja $a(.,.)$ uma forma bilinear contínua em uma espaço de Hilbert \mathcal{L} e coerciva em um subespaço fechado $V \subset \mathcal{L}$. Então dado um subespaço de dimensão finita*

$V_h \subset V$ e um funcional linear contínuo $l \in V'$, então $\exists! u_h \in V_h$ t.q.

$$a(u_h, v) = l(v), \forall v \in V_h.$$

Dem. Ver [19]. ■

Definição 57 Uma subdivisão/partição/malha Ω^h de um domínio Ω é uma coleção finita de conjuntos abertos, ou subdomínios (elementos), $\{\Omega_{e_i}\}$, tal que

$$\begin{aligned} i) \quad \Omega_{e_i} \cap \Omega_{e_j} &= \emptyset, \text{ se } i \neq j; \\ ii) \quad \bigcup_i \overline{\Omega_{e_i}} &= \Omega. \end{aligned}$$

Obsevação 58 Uma partição Ω^h é dita ser regular se $\exists C \in \mathbb{R}_+^*$, tal que

$$\frac{h_{e_i}}{h^*} \leq C, \forall \Omega_{e_i} \in \Omega^h$$

em que

$$\begin{aligned} i) \quad h_{e_i} &= \text{diam}(\Omega_{e_i}); \\ ii) \quad h^* &= \sup\{\text{diam}(B) \mid B \text{ é uma bola contida em } \Omega_{e_i}\}. \end{aligned}$$

Supõe-se agora que cada elemento $\Omega_{e_i} \in \Omega^h$ é a imagem de um elemento mestre $\hat{\Omega}_{e_i}$ por uma aplicação afim F_{e_i} , i.e., $\Omega_{e_i} = F_{e_i}(\hat{\Omega}_{e_i})$, $\forall \Omega_{e_i} \in \Omega^h$, em que $\hat{\Omega}_{e_i}$ é um cubo canônico ($\hat{\Omega}_{e_i} = (-1, 1)^n$). Sobre o elemento mestre, em \mathbb{R}^n , considera-se agora o espaço dos polinômios de grau $m \geq 0$, conforme segue:

$$\begin{aligned} P_m(\hat{\Omega}_{e_i}) &= \text{span}\{\hat{x}^\alpha \mid 0 \leq \alpha_i \leq m, 0 \leq i \leq n\}; \\ Q_m(\hat{\Omega}_{e_i}) &= \text{span}\{\hat{x}^\alpha \mid 0 \leq |\alpha| \leq m\}. \end{aligned}$$

Obsevação 59 Note que $P_m(\cdot)$ é o conjunto de todos os produtos tensoriais de polinômios de grau menor ou igual a m , definidos sobre o elemento mestre em cada direção coordenada.

Agora define-se para $\mathbf{u} \in [L_2(\Omega)]^3$

$$R_m(\Omega_{e_i}) = \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}|_{\Omega_{e_i}} \circ F_{e_i} \in [P_m(\Omega_{e_i})]^3, & \text{se } \Omega_{e_i} \in \Omega^h \text{ é um quadrilátero;} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}|_{\Omega_{e_i}} \circ F_{e_i} \in [Q_m(\Omega_{e_i})]^3, & \text{se } \Omega_{e_i} \in \Omega^h \text{ é um triangular.} \end{cases}$$

Assim, considerando a condição de contorno essencial $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ em $\mathbf{x} \in \Gamma^u$ ($\overline{\Gamma^u \cup \Gamma^t} = \partial\Omega$ e $\Gamma^u \cap \Gamma^t = \emptyset$), tem-se neste trabalho os conjuntos

$$\begin{aligned} Kin_u(\Omega) &= \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^3, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma^u \right\}; \\ Var_u(\Omega) &= \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \hat{\mathbf{v}} \in [H^1(\Omega)]^3, \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0 \text{ em } \mathbf{x} \in \Gamma^u \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, introduz-se os seguintes subespaços de dimensão finita:

$$\begin{aligned} Kin_{u^h}(\Omega^h) &= \left\{ \mathbf{u} \in Kin_u(\Omega^h) \mid \mathbf{u}|_{\Omega_{e_i}} \in \left[R_m(\hat{\Omega}_{e_i}) \right]^3, \forall \Omega_{e_i} \in \Omega^h \right\}; \\ Var_{u^h}(\Omega^h) &= \left\{ \hat{\mathbf{v}} \in Var_u(\Omega^h) \mid \hat{\mathbf{v}}|_{\Omega_{e_i}} \in \left[R_m(\hat{\Omega}_{e_i}) \right]^3, \forall \Omega_{e_i} \in \Omega^h \right\}. \end{aligned}$$

Apêndice B

Método de Newton

Será descrito neste apêndice o algoritmo de Newton utilizado na solução das equações não lineares envolvidas neste trabalho. A descrição apresentada aqui toma como base o procedimento apresentado em [85] e também em [35].

O método de Newton puro utilizado na solução de sistemas de equações não lineares tem um inconveniente, que é a tendência de não convergir caso o ponto inicial não seja suficientemente próximo da solução. Um método global é aquele que para todo ponto inicial converge para a solução. O essencial da idéia apresentada neste apêndice, é o de combinar a rápida convergência local do método de Newton com a estratégia de convergência quase global, a qual garantirá que o processo siga para a solução em cada interação.

O passo de Newton para o conjunto de equações não lineares pode ser descrito como procurar \vec{x} tal que

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}, \quad (\text{B.1})$$

com $\vec{x} \in R^n$ e $\vec{F} : R^n \rightarrow R^n$. Supondo que \vec{F} seja suficientemente regular pode-se expandi-la em uma série de Taylor numa vizinhança de um ponto específico $\vec{x} = \vec{x}^*$

$$\vec{F}(\vec{x}^* + \delta\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}^*) + \left. \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{x}=\vec{x}^*} \delta\vec{x} + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2). \quad (\text{B.2})$$

Nesta equação a matriz oriunda das derivadas de \vec{F} com relação a \vec{x} é conhecida como matriz Jacobiana, isto é,

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}} \quad (\text{B.3})$$

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (\text{B.4})$$

Assim, pode-se reescrever a expansão em Taylor (eq.B.2) como

$$\vec{F}(\vec{x}^* + \delta\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}^*) + \mathbf{J}|_{\vec{x}=\vec{x}^*} \delta\vec{x} + \mathcal{O}(\delta\vec{x}^2). \quad (\text{B.5})$$

Desprezando o termo de ordem superior $\mathcal{O}(\delta\vec{x}^2)$ na eq.(B.5) e impondo que $\vec{F}(\vec{x}^* + \delta\vec{x}) = 0$,

obtem-se o conjunto de equações lineares que serão responsáveis pela atualização $\vec{x}^* + \delta\vec{x}$, isto é o sistema é resolvido para $\delta\vec{x}$. A eq.(B.5) fica então

$$\mathbf{J}\delta\vec{x} = -\vec{F}, \quad (\text{B.6})$$

onde o sistema de equações lineares algébricas acima é resolvido por decomposição \mathbf{LU} , produzindo

$$\mathbf{LU}\delta\vec{x} = -\vec{F} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{L}\delta\vec{y} = -\vec{F} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{U}\delta\vec{x} = \delta\vec{y}. \quad (\text{B.9})$$

A atualização do vetor solução para a k -ésima iteração é realizada fazendo

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \delta\vec{x}. \quad (\text{B.10})$$

Uma forma alternativa para chegar à solução mostrada na eq.(B.6) é requerer a minimização da seguinte função

$$f = \frac{1}{2} \vec{F} \cdot \vec{F}. \quad (\text{B.11})$$

Porém, pode haver um mínimo local de f que não seja solução de $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$. Deste modo, a minimização de f pelo passo de Newton puro pode causar problemas no processo de solução.

Antes de apresentar uma estratégia melhor para a minimização de f , repare que o passo de Newton é sempre uma direção de descida, uma vez que

$$\vec{\nabla} f \cdot \delta\vec{x} = (\mathbf{J}^T \vec{F}) \cdot (-\mathbf{J}^{-1} \vec{F}) = -\vec{F} \cdot \vec{F} < 0. \quad (\text{B.12})$$

Então, a estratégia será a seguinte: Sempre se tentará primeiro o passo de Newton puro, porque uma vez próximo o suficiente da solução, tem-se garantida a convergência quadrática, sob certas condições. Desta forma, é checado a cada interação se o passo de Newton puro reduz f , caso contrário faz-se uma busca linear, *backtracking*, sobre a direção do passo de Newton puro, até que se tenha um passo aceitável. Devido ao fato de que a direção do passo de Newton puro é uma direção de descida para f , tem-se então, a garantia de se encontrar um passo aceitável pelo *backtracking*.

Perceba ainda que este método minimiza f por tomar passos de Newton que levam \vec{F} para zero, o que não equivale a minimizar f com passos de Newton que levem o $\vec{\nabla} f$ para zero.

Tomando o passo de Newton puro como $\vec{d} = \delta\vec{x}$ pode-se escrever a atualização vista na eq.(B.10) como

$$\vec{x}_k = \vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{d}, \quad 0 < \lambda \leq 1. \quad (\text{B.13})$$

O procedimento busca encontrar λ , tal que faça $f(\vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{d})$ decrescer o suficiente. Para assegurar que este passo seja aceitável são impostas as chamadas condições de Wolfe, que são:

1. Armijo: $f(\vec{x}_k) \leq f(\vec{x}_{k-1}) + C_1 \lambda \vec{\nabla} f \cdot (\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})$;

$$2. \text{ Curvatura: } \vec{\nabla} f(\vec{x}_k) \cdot \vec{d} \geq C_2 \vec{\nabla} f(\vec{x}_{k-1}) \cdot \vec{d}, \quad 0 < C_1 < C_2 < 1.$$

Todavia a segunda condição de Wolfe, curvatura, na prática não foi imposta. A busca linear aqui utilizada foi baseada em interpolações de funções conhecidas e suas derivadas, as quais fortalecerão a condição de Armijo. Tais funções serão melhor descritas mais adiante. Seguindo recomendações da literatura utilizou-se $C_1 \simeq 10^{-4}$. A estratégia prática para o *backtracking* é a seguinte

$$g(\lambda) = f(\vec{x}_{k-1} + \lambda \vec{d}) \quad (\text{B.14})$$

logo

$$g'(\lambda) = \lambda \vec{\nabla} f(\vec{x}_{k-1}) \cdot \vec{d}, \quad (\text{B.15})$$

onde é necessário encontrar λ , o qual minimiza o modelo que será construído a seguir. São conhecidos os valores de $g(0)$ e $g'(0)$, e como o primeiro passo é o passo de Newton puro, então tem-se também $g(\lambda_o = 1)$. Inicialmente será considerado $\lambda_o = 1$, para o qual será avaliada a condição de Armijo. Caso esta condição não seja satisfeita é construído então um modelo quadrático de $g(\lambda)$:

$$g(\lambda) \simeq \left[\frac{g(\lambda_o) - g(0) - \lambda_o g'(0)}{\lambda_o^2} \right] \lambda^2 + g'(0) \lambda + g(0). \quad (\text{B.16})$$

donde se determina o seguinte mínimo:

$$\lambda = -\frac{\lambda_o^2 g'(0)}{2[g(\lambda_o) - g(0) - \lambda_o g'(0)]}. \quad (\text{B.17})$$

Em um segundo e subseqüentes *backtracks*, caso sejam necessários, utiliza-se uma aproximação cúbica para g , usando o valor prévio de $g(\lambda_o)$ e um segundo mais recente $g(\lambda_1)$. Esta aproximação é dada por

$$g(\lambda) = a\lambda^3 + b\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0). \quad (\text{B.18})$$

Obsevação 60 Dado um intervalo $[c, q]$ conhecido, para o presente caso $[0, 1; 0, 5]$, que contenha os comprimentos dos passos aceitáveis, tem-se que esta função cúbica sempre existe e é única.

Determina-se assim a e b , bem como λ_2 , e deste modo o processo se repete até que a condição de Armijo seja satisfeita. Caso λ_k seja muito próximo de λ_{k-1} , ou muito menor que este, impõe-se então que

$$\lambda_k = \frac{\lambda_{k-1}}{2}. \quad (\text{B.19})$$

Tem-se então para a minimização da cúbica

$$\lambda_{k-1} = \lambda_k - (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \left[\frac{g'(\lambda_k) + s_2 - s_1}{g'(\lambda_k) - g'(\lambda_{k-1}) + 2s_2} \right], \quad (\text{B.20})$$

onde

$$s_1 = g'(\lambda_{k-1}) + g'(\lambda_k) - 3 \frac{g'(\lambda_{k-1}) - g'(\lambda_k)}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \quad (\text{B.21})$$

e

$$s_2 = [s_1^2 - g'(\lambda_{k-1}) g'(\lambda_k)]^2. \quad (\text{B.22})$$

A interpolação cúbica é uma estratégia poderosa, já que pode produzir uma taxa de convergência quadrática na iteração descrita acima, para o processo de minimização de λ .

Apêndice C

Funções Tensoriais Isotrópicas

Neste tópico são apresentadas algumas características e propriedades das funções tensoriais isotrópicas. A apresentação se limitará às funções tensoriais isotrópicas, de um tensor simétrico, mais utilizadas durante o texto tais como a raiz quadrada $\sqrt{\mathbf{X}}$, o logaritmo de um tensor simétrico $\ln(\mathbf{X})$ e da chamada função exponencial tensorial $\exp(\mathbf{X})$. Mais detalhes podem ser encontradas em [54] e [107].

As funções tensoriais isotrópicas comentadas anteriormente são do tipo

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) : \text{Sim}(V^n) \rightarrow \text{Sim}(V^n) \quad (\text{C.1})$$

com

$$\mathbf{QY}(\mathbf{X})\mathbf{Q}^T = \mathbf{Y}(\mathbf{QXQ}^T), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}. \quad (\text{C.2})$$

C.1 Funções Tensoriais Isotópicas de Um Simples Argumento

Considere y como uma função de um único argumento x . Dada $y : R \rightarrow R$, uma classe de funções tensoriais isotrópicas de um tensor simétrico \mathbf{X} pode ser construída como:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^p y(x_i) \mathbf{E}_i \quad (\text{C.3})$$

onde $y(x_i)$ são os autovalores de $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ e \mathbf{E}_i são os tensores simétricos definidos como autoprojeções de \mathbf{X} , dados por

$$\mathbf{E}_i = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i, \quad (\text{C.4})$$

sendo \vec{e}_i os autovetores ortonormais de \mathbf{X} .

Como exemplos desta classe de funções tensoriais pode-se citar $\sqrt{\mathbf{X}}$, $\ln(\mathbf{X})$ e $\exp(\mathbf{X})$ onde temos respectivamente

$$y(x_i) = \sqrt{x_i} \quad (\text{C.5})$$

$$y(x_i) = \ln(x_i) \quad (\text{C.6})$$

$$y(x_i) = \exp(x_i). \quad (\text{C.7})$$

A determinação prática dos autovalores e dos respectivos autovetores de \mathbf{X} depende do procedimento de *decomposição espectral* adotado. Uma vez determinados os valores de x_i e \mathbf{E}_i os valores de $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ são calculados por:

- Duas dimensões:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^2 y(x_i) \mathbf{E}_i & \text{para } x_1 \neq x_2 \\ y(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 \end{cases}; \quad (\text{C.8})$$

- Três dimensões:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 y(x_i) \mathbf{E}_i & \text{para } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ y(x_a) \mathbf{E}_a + y(x_b) (\mathbf{I} - \mathbf{E}_a) & \text{para } x_a \neq x_b = x_c \\ y(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases}. \quad (\text{C.9})$$

Os valores das derivadas,

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \frac{d\mathbf{Y}(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}}, \quad (\text{C.10})$$

também são necessárias em vários momentos do texto. Os valores das derivadas das funções tensoriais isotrópicas de um tensor simétrico podem ser determinadas por:

- Duas dimensões:

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{y(x_1) - y(x_2)}{x_1 - x_2} (\mathbf{I} - \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2) + \sum_{i=1}^2 y'(x_i) \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_i & \text{para } x_1 \neq x_2 \\ y'(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 \end{cases}; \quad (\text{C.11})$$

- Três dimensões:

$$\mathbf{D}(\mathbf{X}) = \begin{cases} \sum_{a=1}^3 \left\{ \frac{y(x_a)}{(x_a - x_b)(x_a - x_c)} \left[\frac{d\mathbf{X}^2}{d\mathbf{X}} - (x_b + x_c) \mathbf{I} - \right. \right. \\ \quad \left. \left. - [(x_a - x_b) + (x_a - x_c)] \mathbf{E}_a \otimes \mathbf{E}_a - (x_b - x_c) (\mathbf{E}_b \otimes \mathbf{E}_b - \mathbf{E}_c \otimes \mathbf{E}_c) \right] + \right. \\ \quad \left. + y'(x_a) \mathbf{E}_a \otimes \mathbf{E}_a \right\} & \text{para } x_1 \neq x_2 \neq x_3 \\ s_1 \frac{d\mathbf{X}^2}{d\mathbf{X}} - s_2 \mathbf{I} - s_3 \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} + s_4 \mathbf{X} \otimes \mathbf{I} + s_5 \mathbf{I} \otimes \mathbf{X} - s_5 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} & \text{para } x_a \neq x_b = x_c \\ y'(x_1) \mathbf{I} & \text{para } x_1 = x_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

nestes resultados os índices (a, b, c) são as permutações cíclicas de $(1, 2, 3)$, $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ e

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{y(x_a) - y(x_c)}{(x_a - x_c)^2} - \frac{y'(x_c)}{x_a - x_c} \\
 s_2 &= 2x_c \frac{y(x_a) - y(x_c)}{(x_a - x_c)^2} - \frac{x_a + x_c}{x_a - x_c} y'(x_c) \\
 s_2 &= 2 \frac{y(x_a) - y(x_c)}{(x_a - x_c)^3} - \frac{y'(x_a) + y'(x_c)}{(x_a - x_c)^2} \\
 s_4 &= s_5 = x_c s_3 \\
 s_6 &= x_c^2 s_3.
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

C.2 A Função Exponencial Tensorial

A função exponencial tensorial tem um importante papel na determinação dos algoritmos utilizados nos **Capítulos 3** e **4** deste trabalho. No contexto de viscoplasticidade em deformações finitas, o seu uso, juntamente com a medida de deformação $\ln(\cdot)$, permite que os algoritmos de mapeamento de retorno sejam escritos da mesma forma daqueles encontrados no contexto de pequenas deformações.

Nesta seção deste apêndice, é apresentada a definição da função exponencial tensorial juntamente com algumas de suas propriedades mais importantes.

Considere o problema de valor inicial definido pela equação diferencial ordinária tensorial:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) \tag{C.14}$$

com

$$\mathbf{Y}(t_o) = \mathbf{Y}_o, \tag{C.15}$$

na qual $\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$, e \mathbf{A} e \mathbf{Y}_o são tensores constantes, em geral não simétricos. A função exponencial tensorial, também conhecida como mapeamento exponencial, $\exp(\cdot)$, é a única solução para o problema da Eq.(C.14), a qual é dada por

$$\mathbf{Y}(t) = \exp[(t - t_o) \mathbf{A}] \mathbf{Y}_o. \tag{C.16}$$

Explicitamente, a função exponencial tensorial pode ser dada em termos da seguinte representação em série

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{X}^n \tag{C.17}$$

na qual \mathbf{X} é um tensor qualquer.

C.2.1 Algumas Propriedades da Função Exponencial Tensorial

1. O determinante da função exponencial tensorial satisfaz

$$\det[\exp(\mathbf{X})] = \exp[\text{tr}(\mathbf{X})]. \tag{C.18}$$

2. Pelo uso da Eq.(C.17) pode-se chegar a

$$\exp(\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{D}^{-1}) = \mathbf{D} \exp(\mathbf{X}) \mathbf{D}^{-1}, \quad (\text{C.19})$$

isto implica que para qualquer tensor ortogonal \mathbf{Q}

$$\exp(\mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \exp(\mathbf{X}) \mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.20})$$

isto é, a função exponencial tensorial é isotrópica.

3. Para qualquer tensor \mathbf{X}

$$\exp(-\mathbf{X}) = [\exp(\mathbf{X})]^{-1}. \quad (\text{C.21})$$

4. Se \mathbf{C} e \mathbf{D} comutam, isto é, se $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$, então

$$\exp(\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \exp(\mathbf{C}) \exp(\mathbf{D}) = \exp(\mathbf{D}) \exp(\mathbf{C}). \quad (\text{C.22})$$

Esta propriedade implica que para qualquer tensor \mathbf{X} e inteiro n temos

$$\exp(n\mathbf{X}) = [\exp(\mathbf{X})]^n. \quad (\text{C.23})$$

5. Seja \mathbf{X} um tensor anti-simétrico, $\mathbf{X} = -\mathbf{X}^T$, então

$$\mathbf{Q} = \exp(\mathbf{X}) \quad (\text{C.24})$$

é um tensor ortogonal, ou seja uma rotação.

6. As componentes cartesianas da derivada da função exponencial tensorial, com relação ao argumento, têm a seguinte representação em série:

$$[D \exp(\mathbf{X})]_{ijkl} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^n [\mathbf{X}^{m-1}]_{ik} [\mathbf{X}^{n-m}]_{lj}. \quad (\text{C.25})$$

C.2.2 Integração via Mapeamento Exponencial

A integração numérica do problema de valor inicial apresentado na Eq.(C.14), pode ser feita utilizando a regra clássica de integração de *Euler*, ou mesmo pelo uso de uma regra baseada na chamada regra do ponto intermediário, *midpoint rule*.

Seja um intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Basicamente, o algoritmo que aproxima \mathbf{Y}_{n+1} da solução é dado por

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \exp[\Delta t \mathbf{A}(t_{n+\theta})] \mathbf{Y}_n \quad (\text{C.26})$$

com

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n \quad (\text{C.27})$$

$$t_{n+\theta} = t_n + \theta \Delta t \quad (\text{C.28})$$

e $\mathbf{A}(t_{n+\theta})$ sendo constante dentro do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. O parâmetro θ satisfaz

$$0 \leq \theta \leq 1. \quad (\text{C.29})$$

A escolha de $\theta = 0$ produz uma integração *explícita*. Com a escolha de $\theta = \frac{1}{2}$ e $\theta = 1$ temos respectivamente a integração baseada no ponto médio e a integração *implícita*. O algoritmo apresenta precisão de segunda ordem para $\theta = \frac{1}{2}$ e precisão de primeira ordem para $\theta = 1$.